UNIVERSIDADE DE LISBOA

O contributo do feedback escrito
na aprendizagem matemática de alunos do 12.º ano de escolaridade

Maria Tavares Manso Captivo

Mestrado em Ensino de Matemática

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada
Orientado pela Prof.ª Doutora Leonor Santos
Coorientado pela Prof.ª Doutora Suzana Nápoles

2018

Resumo

Este trabalho pretendeu estudar o contributo do feedback escrito para a aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas numa turma de 12.º ano de escolaridade. Em particular, procurei compreender a importância que os alunos atribuem ao feedback escrito e a sua eficácia no trabalho dos alunos e identificar as caraterísticas do feedback escrito que se revelam potenciadoras de aprendizagem.

No estudo, que assenta num paradigma interpretativo, posicionei-me como observadora participante. Recolhi dados através da observação direta, acompanhada de registo áudio das interações entre mim e os alunos e entre alguns pares de alunos e de registos escritos; da recolha documental, que contemplou as versões antes e depois do feedback escrito e os comentários fornecidos; e da realização de dois questionários aos alunos, antes e depois da intervenção letiva. Os treze alunos da turma foram participantes, tendo considerado todos os aspetos de natureza ética necessários. A análise de dados recorreu à análise de conteúdo.

A intervenção letiva incidiu sobre o tópico dos modelos exponenciais e contemplou sete aulas, tendo sido propostas três tarefas em grupo e duas tarefas individuais. Neste trabalho, foi dada a oportunidade aos alunos de melhorarem as suas produções escritas depois de receberem feedback escrito a uma primeira versão.

Os resultados mostram que todos os alunos conhecem o feedback escrito e que a maioria o considera útil para a sua aprendizagem. Observou-se que a maioria dos alunos melhora o seu trabalho depois de ter recebido feedback escrito. Estas melhorias verificam-se ao nível da completude das respostas; da explicitação do significado no contexto do problema; da fundamentação; da correção; e do enriquecimento do trabalho. Para além disso, é possível identificar as caraterísticas potenciadoras da aprendizagem dos alunos: periodicidade, conteúdo, não corrigir, especificidade, forma, contexto, modo de operacionalização, questionar, referência a aspetos bem conseguidos e escolha das palavras. Por fim, importa notar que o feedback oral contribui para a compreensão que os alunos fazem dos comentários e, consequentemente, para as suas aprendizagens matemáticas.

Palavras-chave: aprendizagem matemática; ensino secundário; avaliação para a aprendizagem; feedback escrito; funções exponenciais e logarítmicas.

Abstract

This work aimed to study the contribution of written feedback to the learning of exponential and logarithmic functions in a 12th grade class. In particular, I tried to understand the importance that students give to written feedback and its efficiency in their work and to identify its most important features to their learning process.

During the study, that is based on an interpretative paradigm, I positioned myself as a participant observer. The main data collection methods were direct observation, collection of written productions, which include the versions before and after and the written comments, and two questionnaires, before and after the teaching unit. The thirteen students of the class were participants of the study and all ethical issues were taken under consideration. The data analysis followed the content analysis.

The teaching unit was focused on the exponential models' topic and contemplated seven lessons, where three group tasks and two individual tasks were proposed. During this time, students were given the opportunity to improve their work after having received written feedback to their first version.

The results show that all students know what is written feedback and most of them find it useful for their learning. It is also possible to say that most of the students improve their work after receiving written feedback. These improvements are related to the completeness of the answers; to their meaning in the context of the problem; to grounding; to correction; and to enrichment of the work. Besides this, it is possible to identify the main features which support students' learning process: periodicity, to not correct, content, specificity, shape, context, operation mode, to question, pointing strengths and words' choice. Finally, it is important to note that oral feedback was an important contribution to the students' comment comprehension and, therefore, to their mathematic learning gains.

Key-words: mathematical learning; high school; assessment for learning; written feedback; exponential and logarithmic functions.

Agradecimentos

À minha orientadora, Prof.ª Doutora Leonor Santos, pelo acompanhamento constante, próximo e exigente ao longo de todo o ano.

À minha coorientadora, Prof.ª Doutora Suzana Nápoles, pela disponibilidade e incentivo ao rigor científico.

Ao meu professor cooperante, Dr. Nuno Santos, pela paciência e confiança com que sempre me acompanhou desde o início do ano.

A cada um dos treze alunos do 12º A_2, pela alegria com que me recebeu e me deixou fazer parte do seu crescimento.

Ao Colégio Pedro Arrupe, nas pessoas da Dr.ª Ana Mira Vaz e do Dr. José Larião, e a todo o seu departamento de Matemática, pela generosidade com que me acolheram.

Aos professores Rita Cotrim e Hugo Canela, por me mostrarem que ser professor é uma vocação.

Aos meus amigos, por se fazerem presentes e pelo ânimo que me dão.

De forma especial, aos meus pais, aos meus avós, à Teresa e à Rita, pelo apoio incondicional e motivação constante.

Muito obrigada.

ÍNDICE

Índice de Figuras

Índice de Gráficos

Índice de Quadros

Índice de Tabelas

Índice de Anexos

CAPÍTULO 1
INTRODUÇÃO

Neste capítulo, começo por apresentar as motivações pessoas que contribuíram para a realização deste estudo. Em seguida, refiro os objetivos e as questões deste trabalho de cariz investigativo e apresento as razões pelas quais se trata de um estudo relevante e pertinente. Concluo com a apresentação da organização seguida no presente relatório.

Motivações Pessoais

O presente estudo foi realizado sobre o tema do contributo do feedback escrito nas aprendizagens matemáticas de alunos do 12.º ano de escolaridade. A escolha deste tema para o desenvolvimento deste trabalho deveu-se a alguns fatores. Ao longo da intervenção letiva, tenho recordado, com alguma frequência, o meu percurso enquanto aluna, em particular no Ensino Secundário. Isto tem contribuído para voltar a tomar consciência do papel e importância que certos professores tiveram na minha aprendizagem e no meu crescimento. Em todos os professores que fui identificando como referências no meu percurso, pude encontrar a capacidade de me orientar de forma adequada. Para isso, procuraram conhecer-me e, assim, encontrar a melhor forma de estabelecerem uma relação e comunicar comigo, seja sobre aspetos específicos da disciplina que lecionavam, seja sobre outros mais gerais também relativos à minha formação. De facto, tomei consciência de que aquilo que todos estes professores tinham em comum era o cuidado de conhecer e compreender os alunos que tinham à sua frente, conseguindo acompanhá-los de forma responsável e comprometida. Para além disso, apercebi-me de que foi a forma de acompanhamento (dentro e fora da sala de aula) que os tornou referências para mim e para muitos daqueles com quem partilhei o meu percurso escolar.

Quando, no âmbito da Unidade Curricular de Iniciação à Prática Profissional III, tive oportunidade de aprofundar o tema do feedback, pude ter uma perspetiva diferente de uma prática de ensino que muito tinha contribuído para a minha aprendizagem, especialmente por ter sido bem desenvolvida pelos professores que encontrei durante o meu percurso escolar. Estes aspetos despertaram, de forma especial, o meu interesse e, consequentemente, a minha curiosidade para a possibilidade de aprofundar o meu conhecimento sobre esta prática de ensino.

Tal como terei oportunidade de explicitar no desenvolvimento do meu trabalho, a turma em que realizei a minha intervenção letiva tem caraterísticas muito particulares. O número reduzido de alunos e a abertura com que me acolheram desde o início permitiram que os conhecesse e, assim, fosse aprendendo como poderia acompanhar cada um de forma adequada. Tratando-se de uma turma pequena, e tendo a possibilidade de ter um acompanhamento mais próximo de cada um dos alunos, reforcei a minha perceção sobre a importância que tem a forma como um professor comunica com os seus alunos. Neste sentido, percebi que o feedback dado por um professor, de forma escrita ou oral, pode ter um papel essencial na aprendizagem dos alunos.

Tendo tudo isto em conta, considerei que desenvolver este estudo com esta turma seria uma oportunidade de trabalho muito interessante, que me motivou desde o seu arranque.

Objetivo e Questões do Estudo

O desenvolvimento deste trabalho teve como objetivo estudar o contributo do feedback escrito para a aprendizagem da unidade de ensino de Funções Exponenciais e Logarítmicas numa turma do 12.º ano de escolaridade. Neste sentido, procurei responder às seguintes questões:

- Que importância os alunos atribuem ao feedback escrito?
- Qual é a eficácia do feedback escrito fornecido aos alunos nas suas produções escritas?
- Que caraterísticas do feedback escrito se revelam potenciadoras da aprendizagem dos alunos?

Relevância e Pertinência do Estudo

De forma geral, os autores reconhecem que o feedback é essencial para um bom processo de aprendizagem (Huxham, 2007). Aliás, segundo Cross (1996), tentar aprender sem feedback é como praticar tiro com arco às escuras. Neste sentido, podemos compreender que a qualidade com a qual esta prática é desenvolvida é um aspeto fundamental para o contributo que esta pode ter na aprendizagem dos alunos. A verdade é que, ainda que se apresente como uma das mais poderosas influências na aprendizagem, não é necessariamente positivo (Hattie & Timperley, 2007). Desta forma, importa compreender as caraterísticas e condições que permitem que o feedback seja efetivo e tenha um impacto positivo. De acordo com Brookhart (2007), a forma como se comunica é um aspeto muito relevante nesta prática. De facto, para que o feedback seja efetivo, este tem de ser claro, positivo e fornecido de uma forma que o aluno compreenda e perceba como o utilizar nas suas aprendizagens (Brookhart, 2007).

O feedback pode ser transmitido de diferentes formas aos alunos, sendo os comentários escritos uma destas. Este tipo de feedback permite que os professores tenham mais tempo e, consequentemente, consigam analisar de forma mais detalhada o trabalho realizado por cada um dos seus alunos. Desta forma, os comentários produzidos e fornecidos traduzem um processo de reflexão cuidado e profundo (Bruno & Santos, 2010).

Diferentes estudos têm sido realizados com o propósito de compreender quais são as caraterísticas que este tipo de comentários deve apresentar de forma a melhor contribuir para a aprendizagem dos alunos, em particular em Matemática. Por exemplo, Santos e Pinto (2009) concluíram que, comparando diferentes formas de feedback, a forma interrogativa ou mista parece ser mais clara para os alunos do ensino básico em Matemática do que a forma apenas declarativa. Ainda assim, nem todos os comentários que recorrem a esta forma têm um impacto positivo no trabalho dos alunos, pelo que é muito importante que este seja dado com o devido enquadramento na tarefa. As autoras puderam ainda constatar que a ineficácia de certos cometários não se deve à forma como são feitos, mas antes à reduzida perceção que os alunos têm da tarefa. Ainda assim, e uma vez que não existe uma receita ideal para todo o tipo de alunos, o aspeto mais importante é o conhecimento que o professor tem dos seus alunos e a forma como, a partir daí, desenvolve esta prática (Brookhart, 2007).

No entanto, e apesar de ser mencionada frequentemente em artigos relativos ao ensino e à aprendizagem, são poucos os estudos que, recentemente, se dedicaram a investigar de forma aprofundada o significado que o feedback tem dentro das salas de aulas. Desta forma, para além de tratar uma problemática importante, o objetivo deste trabalho é pertinente nos dias de hoje (Hattie & Timperley, 2007).

Organização do Estudo

O presente relatório pretende descrever o estudo apresentado anteriormente, através do seu objetivo e das suas questões orientadoras. Assim, cada um dos capítulos que serão posteriormente apresentados está associado a cada uma das etapas do desenvolvimento deste trabalho.

O segundo capítulo, *Enquadramento Curricular e Didático*, começa por abordar a avaliação formativa, perspetiva em que o feedback é contemplado. Em seguida, apresenta uma visão geral sobre os trabalhos que já foram desenvolvidos sobre o tema do feedback, focando, de forma particular, o feedback escrito e considerando, de forma especial, os trabalhos realizados no âmbito da aprendizagem matemática. Por fim, é explorada a utilização de tarefas e a sua relação com a avaliação formativa.

No terceiro capítulo, *A Unidade Didática*, é apresentada a proposta pedagógica concretizada numa turma do 12.º ano no âmbito de Iniciação à Prática Profissional IV. Para além da caraterização da escola e da turma em que foi realizada esta intervenção letiva, descrevo a forma como esta proposta foi desenvolvida, incluindo a explicitação da articulação do feedback dado ao longo das diferentes aulas, a justificação dos recursos utilizados e das abordagens adotadas na construção das tarefas propostas aos alunos. Um breve balanço reflexivo sobre as aulas realizadas é igualmente apresentado.

O quarto capítulo, *Metodologia*, apresenta as principais opções metodológicas tomadas no desenvolvimento do trabalho de cariz investigativo. Descrevo, também, os diferentes instrumentos de recolha de dados utilizados, referindo o tipo de dados recolhidos e justificando a sua utilização.

No quinto capítulo, *Análise de Dados*, apresento uma análise dos dados recolhidos no contexto desta problemática e de acordo com o objetivo deste estudo.

Por fim, no sexto capítulo, *Conclusões*, apresento os principais resultados obtidos no desenvolvimento deste trabalho, procurando dar resposta às questões de investigação por mim formuladas, bem como uma reflexão global final de todo o trabalho realizado.

CAPÍTULO 2

ENQUADRAMENTO CURRICULAR E DIDÁTICO

Avaliação para a Aprendizagem

A avaliação pode ser definida como o processo de recolha de informação sobre o conhecimento do aluno, a sua capacidade de o utilizar e a sua disposição em relação à matemática e, a partir dessas evidências, realizar inferências para os mais variados propósitos (NCTM, 1995), muito em particular, suportar o processo de aprendizagem da matemática, fornecendo informação útil ao aluno e ao professor (NCTM, 2000).

Durante os últimos séculos, a avaliação foi sendo vista como a forma de conhecer o que os alunos aprenderam, de medir as aprendizagens realizadas. No entanto, nas últimas décadas, diferentes autores começaram a alertar para o papel que a avaliação poderá ter na melhoria da aprendizagem dos alunos, em vez de simplesmente medi-la (William, 2007).

Para compreender de que forma é que a avaliação pode contribuir para a melhoria da aprendizagem dos alunos, em vez de apenas a medir, interessa explicitar que este processo contempla diferentes ações: (i) tomar uma decisão sobre o que é importante fazer para alcançar um determinado objetivo; (ii) recolher informação; (iii) interpretar a informação recolhida; e (iv) desenvolver uma ação fundamentada na interpretação realizada. Não é obrigatório que estas ações sejam desenvolvidas de forma sequencial ou linear. Por exemplo, pode existir a necessidade de repetir a recolha de informação por se reconhecer como insuficiente ou desadequada para o trabalho que se pretende desenvolver (Santos, 2016).

As primeiras três ações permitem que se produza um julgamento, sendo a quarta aquela que, a partir das anteriores, marca o fim definido. Desta forma, são os seus propósitos que permitem distinguir os tipos de avaliação. De facto,

> A mesma informação, recolhida do mesmo modo, chamar-se-á formativa se for usada para apoiar a aprendizagem e o ensino ou sumativa se não for utilizada deste modo, mas apenas para registar e reportar. (Harlen, 2007, p. 208)

Podemos assim afirmar que existem dois propósitos da avaliação: para ajudar a aprender e para sintetizar a aprendizagem (Santos, 2016). Wiliam (2007) reforça esta ideia ao referir que a avaliação para a aprendizagem é qualquer avaliação que tenha como prioridade promover a aprendizagem dos alunos.

Ainda que não exista uma definição consensual de avaliação formativa, é possível identificar alguns pontos convergentes entre as teorias que têm vindo a ser apresentadas por diferentes autores. Este tipo de avaliação, que tem por foco as aprendizagens do aluno, procura dar-lhe consciência do seu processo de aprendizagem, do qual é parte integrante. Nesse sentido, incide tanto sobre os resultados como sobre os processos, procurando as razões que dão sentido às dificuldades, em vez de as sancionar, e não se limita à observação, mas implica uma intervenção no ensino ou na aprendizagem. Por isso, é um tipo de avaliação que também permite apoiar o professor, na medida em que o ajude a orientar a sua prática letiva (Santos, 2008).

Para melhor atingir os propósitos de motivar, apoiar e melhorar a aprendizagem dos alunos, os professores devem desenvolver uma prática de avaliação formativa em sala de aula, sendo possível começar com um processo de recolha de dados em tempo real enquanto os alunos participam ativamente no seu processo de aprendizagem. A pesquisa feita nesse sentido indica que desenvolver um tipo de avaliação formativa como parte integrante do processo de ensino está relacionado com a melhoria da aprendizagem do aluno (NCTM, 2014).

Segundo Santos e Cai (2016), existem algumas condições que garantem a criação de um ambiente adequado em sala de aula para desenvolver práticas de avaliação para a aprendizagem no âmbito do trabalho matemático. Ainda que o ambiente educacional seja bastante complexo, importa referir dois aspetos principais: (i) o papel que o erro tem para os alunos e para o professor; e (ii) o conhecimento dos critérios de avaliação. Por um lado, a forma como os erros são vistos em sala de aula determina a confiança com que os alunos partilham o raciocínio e os processos matemáticos que desenvolvem. Por outro lado, o conhecimento dos critérios de avaliação contribui para que os professores sejam conscientes do processo de ensino que desenvolvem e para que os alunos reconheçam o trabalho que precisam de realizar, visando aproximar-se do nível de desempenho que é esperado que apresentem (Santos & Cai, 2016). De facto, quando a avaliação formativa, também designada por avaliação para a aprendizagem, é praticada continuamente e em sala de aula, os alunos desenvolvem o seu trabalho e fazem-no confiantes de que podem continuar a aprender se se comprometerem a tentar, não desistindo por frustração ou falta de esperança (Stiggins, 2002).

Black e Wiliam (1998) argumentam que o centro da atividade da avaliação para a aprendizagem está assente em dois aspetos essenciais. Em primeiro lugar, os autores referem a perceção que o aluno tem da diferença entre o objetivo de aprendizagem definido e o estado atual do seu conhecimento, da sua compreensão ou das suas competências. Em segundo lugar, surge a ação que os alunos assumem para reduzir esta diferença tendo em vista o objetivo definido. Considerando o primeiro aspeto, a responsabilidade de obter informação é do aluno, através da avaliação que faz de si e do processo de trabalho, e do professor, que comunica com o aluno sobre a observação e a interpretação que faz da diferença entre o objetivo definido e o seu desempenho atual. Estabelecem-se ligações complexas entre a forma como o aluno recebe a informação comunicada pelo professor, o modo como esta perceção motiva o trabalho que visa o objetivo definido e a atividade do processo de aprendizagem que se pode seguir ou não.

Esta ideia também é defendida por Wiliam e Thompson (2007), que definem três processos centrais numa avaliação deste tipo: (i) reconhecer em que ponto os alunos estão na sua aprendizagem; (ii) definir para onde devem dirigir o seu trabalho; e (iii) desenvolver estratégias para lá chegar. Definindo separadamente os papéis de professor, aluno e pares, os autores definem diferentes estratégias essenciais a adotar numa avaliação para aprendizagem. Considerando o papel do professor, concluem que, no processo de desenvolvimento de estratégias que levem o aluno a atingir os seus objetivos, é fundamental que o professor forneça feedback que promova o crescimento do aluno.

Visando ajudar a aprender, a avaliação pode ser desenvolvida através de aspetos como informar os alunos dos objetivos de aprendizagem definidos, de uma forma que estes compreendam desde o início do processo; ajustar, de forma contínua, o tipo de ensino tendo em conta as conclusões retiradas da avaliação das aulas; envolver de forma ativa os alunos num processo de comunicação com o professor e as suas famílias sobre o seu desempenho e os seus progressos; ou, ainda, fornecer feedback de forma regular, informando o aluno do seu desempenho e orientando-o em formas de como progredir (Stiggins, 2002). Assim, a avaliação formativa é um elemento essencial integrante do processo de aprendizagem porque visa contribuir para o progresso da aprendizagem. O feedback é uma ferramenta que pode ser utilizada para ajudar os alunos no seu processo de trabalho (Bruno & Santos, 2010). O desenvolvimento desta prática de ensino não é uma tarefa simples, pelo que existem diferentes aspetos que importa considerar e que serão abordados adiante.

Feedback

Não existe um entendimento de feedback que reúna o consenso de todos os autores (Santos & Pinto, 2018). O feedback que o professor dá aos seus alunos representa a ligação essencial entre avaliação e aprendizagem (Gipps, 2003; Bruno & Santos, 2010). De facto, esta é uma ideia também apresentada por Black e Wiliam (1998), que defendem que, para compreender a centralidade do feedback na avaliação formativa, importa explorar e compreender o conceito de feedback. Originalmente, este termo era utilizado para descrever um sistema existente em circuitos elétricos e eletrónicos relativo ao nível de um sinal de saída (output), mais especificamente a diferença entre o nível real deste sinal e um nível definido como referência. Quando se verificava um efeito de redução desta diferença, tratava-se de um feedback positivo e, quando se verificava um efeito de aumento desta diferença, tratava-se de um feedback negativo. Tendo isto em consideração, é possível identificar quatro elementos presentes num sistema de feedback: (i) informação sobre o nível real de um atributo mensurável; (ii) informação sobre o nível de referência desse mesmo atributo; (iii) um mecanismo que permita comparar os dois níveis e que gere informação sobre a diferença verificada entre ambos; e (iv) um mecanismo através do qual a informação obtida possa ser utilizada para reduzir esta diferença.

Seguindo esta ideia, Ramaprasad (1983) define que

> Feedback é a informação sobre a diferença entre o nível real e o nível de referência de um sistema, que é usado para alterar essa diferença de alguma forma. (Ramaprasad, 1983, p. 4)

Visando a compreensão deste conceito, este autor sugere uma analogia com um indivíduo que planeia uma viagem. A informação que é dada a este indivíduo para que corte nas despesas por estar a gastar dinheiro a mais pode ser considerada feedback. Nesta situação, o parâmetro é o custo da viagem, sendo o nível real as despesas que este indivíduo tem e o nível de referência é o orçamento que tem à sua disposição.

Para além disso, o autor destaca três pontos essenciais sobre a definição que apresenta. Em primeiro lugar, refere que o foco do feedback pode ser qualquer parâmetro de um sistema. Considerando a origem da palavra feedback, refere que este pode incidir sobre o input, os processos desenvolvidos ou o output. Em segundo lugar, as condições necessárias para que exista feedback são três dos elementos já acima apresentados: (i) informação sobre o nível de referência do parâmetro; (ii) informação sobre o nível atual do parâmetro; e (iii) informação sobre a diferença que se verifica entre ambos. Neste sentido, se um destes três elementos não estiver presente, não se pode considerar que existe feedback. Por fim, a informação sobre a diferença observada apenas pode ser considerada feedback se for utilizada com o propósito de a reduzir. Isto significa que, mesmo que exista, se a informação não for utilizada com este fim, não pode ser considerada feedback.

Deste modo, o feedback pode ser entendido como a informação dada por um agente (professor, colega, livro, parente, o próprio ou, até, uma experiência) acerca de aspetos relativos ao desempenho de uma determinada pessoa. Esta informação dada pretende reduzir a discrepância entre o desempenho atual e o objetivo de aprendizagem definido (Hattie & Timperley, 2007). Santos e Pinto (2018) reforçam esta ideia referindo que, com intencionalidade formativa, o feedback permite "identificar o que lhe falta fazer para atingir o que era esperado que fizesse" (p. 512).

De forma geral, o facto de os alunos necessitarem de feedback não é questionado. Cross (1996) reconhece essa necessidade na aprendizagem referindo que:

> Um dos princípios básicos da aprendizagem é que os alunos necessitam de feedback. Precisam de saber o que estão a tentar atingir e precisam de saber a proximidade a que se encontram dos objetivos definidos. (p. 4)

Sadler (2010) também defende que esta prática assume um lugar central no desenvolvimento de uma aprendizagem efetiva. O autor refere que os procedimentos de avaliação têm um papel essencial para moldar o comportamento de um aluno e o feedback acelera significativamente esse processo. Neste sentido, o feedback deve ajudar o aluno a compreender melhor os objetivos de aprendizagem definidos, a reconhecer o seu desempenho atual e a confrontá-lo com os objetivos definidos, e a descobrir novas formas de se aproximar desses objetivos. Assim, na avaliação formativa, o feedback deve contribuir para que os alunos se tornem autorreguladores da sua aprendizagem. O autor alerta, ainda, para o facto de não ser possível separar a vontade de fornecer feedback adequado das necessidades práticas e logísticas que estão associadas ao processo de desenvolvimento desta prática de ensino.

Tipos de feedback

Tendo em consideração o seu propósito e a situação em que é feito, o feedback fornecido é diferente. Um dos aspetos em que se podem verificar estas diferenças é relativamente ao seu conteúdo. Neste sentido, alguns autores têm-se dedicado a criar algumas tipologias que permitem categorizar o feedback que é fornecido, de acordo com alguns critérios.

Hattie e Timperley (2007) desenvolveram o seu trabalho de acordo com o *foco* do feedback. Desta forma, definiram, de forma mais precisa, os diferentes níveis a que esta prática pode ser desenvolvida. Argumentam, por isso, que o feedback pode ter como foco a tarefa realizada pelo aluno, os processos utilizados no seu trabalho, a autorregulação do aluno e pode, ainda, ser dirigida ao próprio aluno.

O tipo de *feedback focado na tarefa* também é conhecido como feedback corretivo ou de conhecimento de resultados, estando relacionado com aspetos no âmbito da resolução da tarefa, como a correção e a clareza. Por isso, este pode incluir orientações para adquirir mais informação.

O *feedback centrado nos processos* utilizados no trabalho do aluno está mais orientado para o processamento de informações ou para processos de aprendizagem que exijam a compreensão ou resolução da tarefa. Por exemplo, "Esta página do teu trabalho fará mais sentido se usares as estratégias que discutimos anteriormente" (Hattie & Timperley, 2007, p. 90) pode ser um comentário dirigido a este nível.

O *feedback focado na autorregulação* está relacionado com a forma como os alunos regulam as suas atitudes e ações face aos seus objetivos de aprendizagem, uma vez que a autorregulação resulta da interação entre compromisso, controlo e confiança. Por exemplo,

> Tu já sabes as caraterísticas fundamentais para uma boa apresentação dos teus argumentos. Relê o teu trabalho e verifica se estas estão presentes no primeiro parágrafo. (Hattie & Timperley, 2007, p. 90)

pode ser um comentário dirigido a este nível.

O *feedback dirigido à pessoa, ao self,* é o mais frequentemente utilizado nas salas de aulas, ainda que, tal como veremos adiante, seja unanimemente reconhecido como o menos efetivo. Comentários como "Bom trabalho!" ou "És um bom aluno." contém pouca informação sobre o trabalho desenvolvido pelo aluno em questão e, de forma geral, não estimulam um maior nível de compromisso e esforço face ao trabalho a desenvolver e aos objetivos de aprendizagem. (Hattie & Timperley, 2007).

Também se podem definir diferentes tipos de feedback quanto ao *papel que desempenham*, podendo este ser: *de correção*, que implica clareza de direção dada no feedback proporcionado e uma ação corretiva; *de reforço*, que considera o feedback como um forte estímulo externo que fornece reforço positivo ou negativo; *de diagnóstico*, que promove que os alunos desenvolvam a capacidade de identificar os erros do seu trabalho; *de comparação*, que fornece informação ao aluno que o ajude a reconhecer a diferença que existe entre o desempenho que revela no seu trabalho e aquilo que era esperado; e *de progresso*, que não só identifica oportunidades de melhoria em trabalhos semelhantes posteriores, como fornece informações que orientam o aluno nesse processo de trabalho (Price, Handley, Millar & O'Donovan, 2010).

Tunstall e Gipps (1996) também estudaram o feedback e, depois de uma análise cuidada a uma grande variedade de feedbacks, criaram uma tipologia quanto à *natureza* do feedback. Os autores consideram que existem, essencialmente, cinco tipos de feedback, sendo que quatro destes estão mais relacionados com o processo avaliativo, e que apresentam diferenças ao nível daquilo que pretendem transmitir ao aluno. Referem, em primeiro lugar, que existe um tipo de feedback como *instrumento de socialização* (que categorizam como feedback S) e que está relacionado com os valores, atitudes e práticas dentro de uma sala de aula. Serve, por isso, para expressar a forma como é esperado que os alunos estejam dentro da sala de aula, comunicando-lhes as expetativas centrais do professor.

Em seguida, apresentam os quatro tipos de feedback relativos à avaliação, categorizando-os como A, B, C e D. O feedback do tipo A, de caráter avaliativo, tem um papel de *gestão individual e da turma*, estando relacionado com a atribuição de recompensas (feedback positivo) e de castigos (feedback negativo). O feedback do tipo B, também de caráter avaliativo, tem um papel de *orientação do desempenho do aluno*, estando relacionado com a expressão de aprovação (feedback positivo) e de desaprovação (feedback negativo), de diferentes formas, por parte do professor. O feedback do tipo C, de caráter descritivo, tem um papel *de orientação num domínio específico*, estando relacionado com a referência a aspetos bem conseguidos (feedback de realização) ou aspetos a melhorar (feedback para melhoria). Finalmente, o feedback do tipo D, também de caráter descritivo, tem um papel de *orientação na aprendizagem*, estando relacionado com a construção do sucesso do aluno (feedback de realização) ou com a construção do caminho que o aluno deve seguir (feedback para melhoria).

Gipps (1999) retoma a tipologia quanto à natureza do feedback, reforçando a distinção entre caráter avaliativo e caráter descritivo. Segundo a autora, o feedback de *caráter avaliativo* tece juízos de valor, fazendo um uso implícito ou explícito de normas. O feedback de *caráter descritivo* está relacionado com a tarefa proposta, fazendo referências específicas ao desempenho real do aluno, quanto ao seu progresso e às suas competências. É de fazer notar que esta distinção tem por base associar o processo avaliativo sobretudo ao juízo de valor. Por outras palavras, assume um significado de processo avaliativo mais restrito do que aquele que é considerado neste trabalho e anteriormente apresentado com quatro ações.

Santos e Dias (2006) referem a distinção entre dois tipos de comentários avaliativos, apresentando a anotação como *transmissão de informação* e a anotação como *diálogo*. A primeira é caraterizada por juízos de valor e enunciados pouco específicos e revela ser um contributo pouco relevante na aprendizagem dos alunos. A segunda pretende questionar o aluno e fornecer algumas sugestões, promovendo a reflexão do aluno no seu processo de trabalho. Segundo Quinton e Smallbone (2010), um aspeto essencial do processo de aprendizagem do aluno é a capacidade de o aluno refletir sobre o trabalho e sobre o feedback que recebe, o que indica que o segundo tipo de comentário pode contribuir positivamente para o progresso dos alunos.

Importa, também, considerar os dois tipos de feedback que existem quando consideramos o trabalho individual ou o trabalho em grupo. Tal como veremos adiante, também nestas situações existem condições propícias à sua eficácia.

Para além do conteúdo do feedback fornecido, este pode ser dado através de diferentes *formas*. Em certas situações, pode ser mais adequado fornecer comentários escritos; noutras situações aquilo que mais pode contribuir para a aprendizagem do aluno é fazê-lo de forma oral; e, nalguns casos, as demonstrações poderão ajudar mais o aluno, como, por exemplo, quando se trata de mostrar a uma criança como é que se segura corretamente num lápis (Brookhart, 2007).

O trabalho descrito no presente documento incidiu sobre a forma dos comentários escritos, forma através da qual é possível fornecer feedback escrito. De acordo com Bruno e Santos (2010), uma grande vantagem deste tipo de feedback é o facto de permitir aos professores terem tempo para pensar o que dizer a cada aluno ou grupo de alunos. De facto, podendo analisar os trabalhos dos alunos com mais detalhe, os comentários que fornecem resultam de um processo de reflexão aprofundado.

Existem ainda fortes evidências de que fornecer feedback escrito tem um impacto mais positivo na aprendizagem dos alunos do que a simples classificação dos seus trabalhos (Black e William, 1998).

Eficácia do feedback

Vários autores têm desenvolvido o seu trabalho no sentido de estudar os aspetos que contribuem para que o feedback seja eficaz no processo de aprendizagem dos alunos.

Kluger e DeNisi (1996) referem que a eficácia do feedback no desempenho do aluno depende de três variáveis: as *sugestões contempladas no feedback fornecido*, a *natureza da tarefa* realizada relativamente à qual é dado feedback e os aspetos *circunstanciais e pessoais associados*. As sugestões dadas no feedback determinam que aspetos vão receber mais atenção por parte de quem recebe o feedback e que, consequentemente, poderão provocar ação. A natureza da tarefa em causa influencia o nível de atenção que o aluno lhe dá e a forma como se envolve. Os aspetos circunstanciais e pessoais determinam a forma como o aluno recebe e acolhe o feedback, influenciando, também, o modo como se empenha em utilizar essas informações no trabalho a desenvolver.

Para ser efetivo, o feedback deve responder a três grandes perguntas: (i) para onde vou?; (ii) como tem sido o meu desempenho?; e (iii) quais são os próximos passos? (Hattie & Timperley, 2007). Em primeiro lugar, para que seja eficaz, o feedback deve informar os alunos dos objetivos e/ou critérios de avaliação que estão definidos para o trabalho que este se encontra a desenvolver. De facto, a definição de objetivos promove uma ação orientada, promovendo a persistência perante as dificuldades encontradas na realização da tarefa proposta e a continuação do trabalho em tarefas interrompidas, mesmo que existam alternativas aparentemente mais fáceis. Para além de informar os alunos sobre estes objetivos, o feedback permite que os alunos e/ou os seus professores definam objetivos desafiantes apropriados quando os anteriores são cumpridos. Neste sentido, Taras (2002) sugere que pode ser utilizada uma combinação de descritores dos padrões e exemplos de trabalhos, funcionando esta, de forma prática, como uma referência para o trabalho a desenvolver.

Em segundo lugar, o feedback deve reconhecer o trabalho que o aluno tem desenvolvido no sentido de atingir os objetivos definidos. Ainda que nem sempre saibam acolher as respostas, os alunos procuram obter informação sobre a perceção que o professor tem do processo de trabalho que têm desenvolvido. Neste âmbito, Hattie e Timperley (2007) referem que os testes sumativos são um método frequentemente utilizado pelos professores para fornecer este tipo de informação. No entanto, os autores também apontam que isto nem sempre ajuda os alunos a compreender efetivamente o seu desempenho. Taras (2002) refere que o processo de comparar o trabalho desenvolvido como os padrões definidos deve ser feito sob a orientação do professor e que revela mais eficaz quando se opta por uma divisão de critérios explícitos. A autora acrescenta, ainda, que estes dois primeiros aspetos contribuem para que os alunos desenvolvam a sua capacidade de autorregulação.

Em terceiro lugar, o feedback deve informar os alunos sobre os aspetos que precisam de ter em consideração para reduzir a diferença que se verifica entre o trabalho realizado e os objetivos definidos (Taras, 2002), isto é, para progredir no seu desempenho. Muitas vezes, seguindo uma lógica sequencial, os professores fornecem mais informação, mais tarefas e mais expetativas, criando no aluno a ideia de que o caminho passa sempre por mais. No entanto, fornecer informação específica neste âmbito pode permitir maiores ganhos na aprendizagem dos alunos, promovendo desafios melhorados, uma postura mais reguladora do próprio trabalho e mais autónoma, mais estratégias para a realização das tarefas propostas e a identificação do que está e do que não está compreendido (Hattie & Timperley, 2007).

Brookhart (2007) desenvolve um trabalho exaustivo que visa enumerar as diferentes formas de fornecer feedback efetivo. Neste sentido, é importante que o professor saiba reconhecer os momentos em que o feedback deve ser fornecido e como o tipo de tarefa desenvolvido pelos alunos é essencial para o professor ponderar que tipo de intervenção se revela mais oportuna e adequada. A capacidade de se colocar na posição do aluno pode ajudar na tomada deste tipo de decisões. Segundo a autora, uma das decisões mais difíceis é relativa à quantidade de feedback fornecido, uma vez que os professores têm sempre o objetivo de atingir com excelência todos os objetivos de aprendizagem e, por isso, têm a tendência de querer intervir sobre os todos os aspetos que podem ser melhorados. É necessário ter em consideração o nível de desempenho dos alunos, reconhecer a evolução que estes apresentam e definir uma estratégia que contribua para que possam ir atingindo os objetivos definidos, respeitando o seu ritmo de aprendizagem e trabalho. De facto, estes aspetos não só permitem compreender que quantidade de feedback é necessária, mas também a forma através da qual é mais adequado fornecer feedback ao aluno, podendo ser feito, por exemplo, de forma oral ou de forma escrita. Por fim, importa reconhecer que o conteúdo do feedback também é um elemento essencial. Este deve ser focado no trabalho desenvolvido pelos alunos e no progresso verificado e deve estar estritamente relacionado com os objetivos de aprendizagem definidos.

Para que possa ser efetivamente um elemento da avaliação formativa, o feedback deve ser específico, referindo-se ao trabalho que está a ser avaliado, e, ao mesmo tempo, geral, identificando aspetos do trabalho de modo mais abrangente, de forma a que possa ser utilizado em trabalhos posteriores (Sadler, 2010).

Tendo a preocupação de garantir que o feedback fornecido seja eficaz, também interessa ter presente as caraterísticas que geralmente são criticadas no feedback, e que, por isso, devem ser evitadas. Nesse sentido, Huxham (2007) começa por referir que o feedback não deve ser vago e enigmático, uma vez que os alunos podem não compreender os aspetos do seu trabalho que necessitam de melhorar ou como o podem fazer. Em seguida, aponta que o feedback dado não deve ser feito de forma negativa, representando, apenas, um catálogo dos erros cometidos, uma vez que isso pode funcionar como um forte contributo para a desmotivação dos alunos na sua aprendizagem, particularmente para aqueles que apresentam um nível de autoestima baixo. Para além disto, mostra como se trata de uma prática que deve ser desenvolvida em tempo adequado, referindo que, muitas vezes, o feedback é fornecido demasiado tarde para que seja efetivamente útil. Por fim, o autor apresenta a falta de clareza do contexto de trabalho e dos critérios de avaliação como um fator que impede que os alunos beneficiem efetivamente do feedback na sua aprendizagem por não compreenderem aquilo que é esperado pelos professores.

Bruno e Santos (2010) também apontam algumas caraterísticas que podem melhorar o contributo desta prática na aprendizagem dos alunos. Para que isso aconteça, o feedback deve: ter o seu foco em erros específicos e em estratégias pouco adequadas, sugerindo aos alunos como podem melhorar o seu desempenho; estimular a correção dos erros e ajudar os alunos a pensarem; sugerir apenas aquilo que é necessário, permitindo que os alunos possam responder por eles próprios; incentivar a procura de soluções alternativas; incidir mais sobre os processos desenvolvidos pelos alunos do que sobre os resultados que apresentam; e deve ser dado e utilizado de forma sistemática.

A partir da literatura sobre esta prática de ensino, Sadler (2010) também aponta algumas caraterísticas que o feedback deve apresentar. Neste sentido, o feedback deve informar os alunos sobre os aspetos positivos do seu trabalho; comunicar, de forma adequada, os aspetos a melhorar, identificando e explorando elementos do trabalho em que se verificam; referir aspetos que poderiam ter melhorado o trabalho apresentado; e sugerir estratégias que podem ser utilizadas posteriormente num tipo de trabalho semelhante.

Interessa agora considerar os diferentes tipos de feedback apresentados na secção anterior a fim de conhecer os aspetos relevantes para que estes se tornem efetivos no processo de aprendizagem dos alunos. Retomando a distinção apresentada por Hattie e Timperley (2007) quanto ao foco da tarefa, os autores referem que o tipo de *feedback focado na tarefa* é mais efetivo quando é dado no âmbito de interpretações erradas e não tanto no âmbito da ausência de conhecimentos. De facto, no caso de os alunos não apresentarem os conhecimentos necessários, é mais útil fornecer novas informações do que dirigir feedback. Para além disso, demasiado feedback dado a este nível pode encorajar os alunos a focarem-se nos resultados imediatos e não nas estratégias necessárias para atingir o grande objetivo de aprendizagem definido com a tarefa. Nesse caso, poderá perder-se a oportunidade de incentivar os alunos a desenvolverem competências importantes através da relação entre as instruções dadas, o feedback e os objetivos de aprendizagem definidos (Hattie & Timperley, 2007).

O *feedback centrado nos processos* aparenta ser mais efetivo que o apresentado anteriormente uma vez que promove uma aprendizagem mais profunda. De facto, uma abordagem mais profunda da aprendizagem está relacionada com a construção da compreensão dos alunos e com as relações que estes estabelecem a partir do trabalho que realizam com as tarefas propostas (Hattie & Timperley, 2007).

O *feedback focado na autorregulação* pode ter um contributo muito positivo na autonomia do aluno no seu processo de aprendizagem. A forma como o feedback contribui, efetivamente, para a aprendizagem do aluno depende de diferentes fatores, entre os quais estão a capacidade de autoavaliação, o esforço em acolher e compreender o feedback recebido ou a capacidade de procurar ajuda (Hattie & Timperley, 2007).

O *feedback dirigido à pessoa, ao self,* é, tal como foi referido, unanimemente reconhecido como o menos efetivo. Intuitivamente, pode parecer que qualquer tipo de elogios contribui de forma positiva para a aprendizagem dos alunos. No entanto, isso não é verdade uma vez que os elogios dirigidos à pessoa do aluno acabam por não fornecer informação relevante ao aluno sobre os objetivos de aprendizagem, sobre o seu desempenho ou sobre aquilo que é esperado relativamente ao trabalho que se encontra a desenvolver, tal como se pretende que aconteça (Hattie & Timperley, 2007).

Retomando os diferentes papéis que o feedback pode assumir (*de correção, de reforço, de diagnóstico, de comparação* e *de progresso*), definidos por Price, Handley, Millar & O'Donovan (2010), os autores referem que as perspetivas de correção e de reforço do feedback podem ser consideradas redutoras uma vez que não representam um grande contributo para a aprendizagem ativa do aluno. Da mesma forma, o feedback com o papel de incentivo ao progresso surge como o que pode trazer o maior contributo ao aluno, uma vez que promove a autonomia do aluno no trabalho que desenvolve (Price, Handley, Millar & O'Donovan, 2010).

A partir de um estudo que desenvolveram, Dias e Santos (2009) puderam concluir que o feedback de caráter descritivo, isto é, que incide sobre a análise do trabalho desenvolvido, aparenta ser mais eficiente quando é fornecido relativamente a tarefas que exijam capacidades matemáticas como o raciocínio, argumentação e comunicação matemáticos e a resolução de problemas.

Ainda que existam variadas caraterísticas que podem tornar o feedback mais efetivo na aprendizagem dos alunos, importa reconhecer que respeitá-las constitui um desafio para o professor. Mas a capacidade de fornecer feedback é melhorada com a prática. As decisões relativas ao desenvolvimento desta prática surgem continuamente no processo de ensino, pelo que todas as oportunidades devem ser aproveitadas pelos professores. Desta forma, estarão a desenvolver o seu reportório de estratégias para dar feedback, sendo essencial, com cada estratégia, observar a forma como o aluno ouve, reage e compreende o feedback dado (Brookhart, 2007).

Importa considerar os aspetos que promovem a eficácia do feedback quanto ao tipo de trabalho desenvolvido, seja individual seja em grupo. No estudo de 2009, Dias e Santos verificaram que, relativamente a tarefas matemáticas realizadas em duas fases, os grupos melhoravam sempre o seu trabalho na segunda fase, desenvolvida depois de terem recebido feedback. As alterações visíveis nas produções escritas resultavam, efetivamente, de importantes melhorias no processo de trabalho desenvolvido de forma cooperativo. Relativamente às tarefas realizadas individualmente, as autoras referem que nem sempre se verificaram melhorias significativas nas produções escritas realizadas depois de os alunos terem recebido feedback. A possibilidade de os alunos confrontarem as interpretações que cada um dos elementos dos grupos faz dos comentários escritos dados pela professora e de discutirem entre si os seus significados parecem dar um contributo muito importante e positivo para que o feedback se torne eficaz.

No trabalho que desenvolveram, as autoras consideram que, ainda que o feedback dado a diferentes tarefas promova aprendizagens a diferentes níveis, a diversidade de tarefas contribui para que os alunos realizem aprendizagens mais sólidas. Neste sentido, e ainda que as conclusões sugiram que a resolução de tarefas individuais não beneficie tanto do feedback dado pelo professor como as tarefas resolvidas em grupo, nenhum tipo de tarefa deve ser excluído do processo de ensino e aprendizagem. Por isso, é necessário continuar a investir no desenvolvimento da prática de dar feedback a todo o tipo de produções escritas apresentadas pelos alunos de forma a compreender que tipo de feedback é mais adequado para cada tipo de tarefa (Dias & Santos, 2009).

Brookhart (2007) também reforça a importância de uma decisão ponderada sobre a escolha entre o feedback a nível individual ou a relativamente ao grupo. Neste sentido, refere que fornecer feedback individualmente mostra ao aluno que o professor valoriza a sua aprendizagem e que fornecer feedback a um grupo promove oportunidades para que o contributo do feedback tenha impacto na medida em que os alunos se ajudam entre si a compreendê-lo e a utilizá-lo. A autora argumenta, ainda, que estas hipóteses não são mutuamente exclusivas, dando o exemplo de uma situação em que muitos estudantes utilizaram termos vagos numa proposta de trabalho escrito. Nesse caso, o professor pode optar por dar feedback a toda a turma sobre a escolha das palavras que observou, sugerindo outras que poderiam ter sido utilizadas, e, em seguida, desenvolver um questionamento oral, ajudando os alunos a obter palavras mais adequadas do que as que utilizaram.

Tendo em consideração os estudos desenvolvidos pelos diferentes autores, importa referir que foram seguidas estas orientações no trabalho desenvolvido durante a intervenção letiva, em particular no momento de fornecer feedback aos alunos. Assim, e dados os aspetos já referidos, optou-se por um feedback de caráter descritivo, com o papel de orientação na aprendizagem, fazendo referência a aspetos bem conseguidos e a melhorar, bem como sugestões de ponto de partida para a continuação do trabalho desenvolvido. Tal como será explicado posteriormente, o feedback foi fornecido tanto a nível individual como a nível de grupo.

Considerando, em particular, o feedback escrito, naturalmente que, sendo uma forma de feedback, este deve ter em consideração muitos dos aspetos que já foram referidos. Ainda assim, diferentes autores têm recorrido a questionários preenchidos pelos alunos sobre a perceção e importância que atribuem, especificamente, a esta forma de feedback. Com base em alguns desses estudos, Nicol (2011) reuniu as caraterísticas que, na perspetiva de alunos dos ensinos secundário e superior, os comentários escritos pelos professores devem apresentar para que se tornem eficazes na sua aprendizagem.

Primeiramente, os alunos referem que o feedback escrito deve ser compreensível, seletivo e específico. Neste sentido, e ainda que as diferentes disciplinas exijam o uso de termos técnicos, o feedback escrito pelo professor deve utilizar uma linguagem simples e acessível, fornecendo uma explicação quando recorre a termos mais difíceis de compreender. Para além disso, a informação fornecida nos comentários escritos deverá ser apresentada com detalhe suficiente para que o aluno compreenda as orientações sugeridas. A referência a exemplos concretos permite que o aluno compreenda as caraterísticas positivas e as que pode melhorar no seu trabalho.

Os alunos reconhecem a grande importância de que o feedback escrito seja dado em tempo adequado. Este aspeto contribui para que este seja efetivamente útil no trabalho que os alunos se encontram a realizar, uma vez que estes ainda têm presente o processo que desenvolveram e podem ter a oportunidade de melhorar o trabalho que apresentaram.

Considerando os aspetos motivacionais relacionados com o feedback escrito, a opinião dos alunos é que o professor deve evitar tecer juízos de valor nos comentários que faz. Este tipo de comentários pode desmotivar os alunos e levar a que estes percam a confiança nas suas capacidades e no trabalho realizado. Neste sentido, os professores devem adotar uma abordagem nos seus comentários escritos que contribua para que os alunos compreendam que o erro faz parte da aprendizagem e que o esforço é um aspeto central no desempenho de qualquer aluno. Também é possível verificar que os alunos reconhecem a importância de o feedback escrito estar devidamente contextualizado. Por outras palavras, os comentários escritos devem estar relacionados com os objetivos definidos e com o trabalho que é esperado que o aluno realize.

Por fim, o autor refere que o aspeto mais pedido pelos alunos é que o feedback escrito seja orientado para o trabalho a desenvolver. Isto significa que os comentários escritos fornecidos não se devem focar apenas nos resultados imediatos, mas antes nos pontos fortes e fracos do trabalho desenvolvido, referindo especificamente aquilo que pode ser utilizado em trabalhos posteriores semelhantes e aquilo que deve ser melhorado. Alguns autores defendem que este aspeto pode ser garantido se as orientações dadas pelos professores nos seus comentários escritos se focarem no desenvolvimento de competências e não apenas em conteúdos específicos. De facto, a longo prazo, desenvolver competências para resolver problemas ou produzir outros trabalhos semelhantes é mais importante do que saber resolver um problema específico ou produzir um determinado relatório. Para além disso, através do feedback escrito, os professores podem promover que os alunos encontrem novas formas de olhar as tarefas propostas, contribuindo para que os alunos desenvolvam outras formas de pensar nos conceitos abordados, nas relações existentes entre estes e nas suas aplicações, alargando a sua perspetiva do trabalho e desenvolvendo outras competências.

Subscrevendo algumas das caraterísticas apresentadas acima, Bruno e Santos (2010) apontam que o feedback escrito deve ser legível, sugerindo a utilização de uma caligrafia que seja fácil de ler, que os comentários devem ser escritos junto ao elemento do trabalho a que se referem e que devem ser evitadas as abreviaturas e os símbolos, podendo estes aspetos contribuir para que o aluno não compreenda os comentários escritos. De facto, estes aspetos devem ser tidos em consideração uma vez que a ilegibilidade do feedback escrito pode contribuir para a frustração dos alunos. Os comentários escritos também devem incluir estratégias de revisão do trabalho, promovendo que sejam os alunos a rever e a corrigir os erros do seu trabalho. Ainda assim, a quantidade de comentários escritos pode influenciar este processo de revisão levado pelo aluno. Na verdade, os professores devem evitar escrever demasiados comentários uma vez que os alunos poderão não saber por onde começar a melhoria do seu trabalho, podendo provocar a desmotivação dos alunos com a ideia de que todo o seu trabalho está a ser posto em causa e contribuir para que estes adotem uma estratégia de tentativa-erro na melhoria do seu trabalho, sem compreender efetivamente o feedback escrito e o contributo para a sua aprendizagem.

Para além disso, as autoras referem que o feedback escrito deve ser compatível com o conhecimento prévio que os alunos têm. Este aspeto evidencia a importância de conhecer bem cada um dos alunos, uma vez que para redigir os comentários escritos, o professor não pode apenas recorrer ao trabalho que o aluno apresenta, mas também ao trabalho que o aluno já desenvolveu, bem como o seu nível de desempenho.

Ainda assim, num estudo realizado em 2009, Santos & Pinto mostraram que contemplar todas estas caraterísticas não resulta necessariamente no mesmo tipo de efeito positivo do feedback escrito dado. Neste sentido, importa considerar outros fatores importante como a forma e a dimensão do feedback, bem como o tipo de aluno em causa e a sua capacidade de perceção, que podem ter influência no contributo desta prática. De facto, dar feedback é uma tarefa que pode apresentar um nível de complexidade elevado, sendo que a intencionalidade do professor e a sua capacidade de refletir sobre o trabalho que desenvolve são fatores determinantes no contributo que uma prática de ensino como esta pode ter nas aprendizagens dos alunos.

Fornecer feedback escrito que seja contributivo para a aprendizagem dos alunos é uma tarefa exigente. De facto, é necessário um grande investimento na escolha e precisão das palavras utilizadas uma vez que os comentários escritos são uma forma de comunicação a que os alunos poderão recorrer várias vezes. Considerando a complexidade de qualquer forma de comunicação, é importante que o professor consiga antecipar a forma como o aluno irá reagir, tanto ao nível do conteúdo quanto à forma como o feedback é escrito. Todos estes aspetos reforçam o nível de exigência associado ao desenvolvimento desta prática de ensino (Sadler, 2010). Por vezes, a fim de melhor contribuir para o processo de aprendizagem dos alunos, torna-se necessário complementar o feedback escrito com feedback oral. Num estudo em 2009, Semana e Santos verificaram esta necessidade e evidenciaram algumas diferenças entre estes dois tipos de feedback. Segundo as autoras, o feedback oral acontece "a par das experiências de aprendizagem, possibilitando uma regulação interativa", podendo, por isso, "ser dirigido a cada caso e desenvolvido até ao nível necessário" (p. 11).

O Uso de Tarefas

A aprendizagem efetiva dos alunos é resultado da atividade que estes realizam e da reflexão que fazem sobre ela. Para compreender esta atividade, importa distinguir este conceito do de tarefa e em que medida é que se relacionam. Na verdade, quando nos encontramos envolvidos numa atividade, realizamos uma certa tarefa, sendo esta, portanto, o objetivo da atividade (Ponte, 2005). Efetivamente, a atividade realizada pode contemplar a proposta de diferentes tarefas (Ponte, 2014). Propor tarefas e conduzir a sua resolução em sala de aula constitui a forma principal de ensino da Matemática. De facto, Christiansen e Walter (1986) referem que:

> A tarefa proposta torna-se o objeto da atividade dos alunos e a proposta de tarefas em conjunto com as ações a elas respeitantes realizada pelo professor constitui o principal método pelo qual se espera que a Matemática seja transmitida pelos alunos. (p. 224)

"O ensino da Matemática baseado na exposição magistral do professor não pode mostrar muito interesse na noção de tarefa" (Ponte, 2014, p. 14). Pelo contrário, um tipo de ensino que privilegie o papel ativo dos alunos na sua aprendizagem necessita desta noção, uma vez que as tarefas podem ser consideradas elementos fundamentais na organização da atividade de quem está a aprender (Ponte, 2014).

No entanto, as tarefas podem contemplar diferentes finalidades. De facto, Ponte (2014) nota:

> Existem tarefas cuja principal finalidade é apoiar a aprendizagem, outras que servem para verificar o que aluno aprendeu (tarefas para avaliação), outras, ainda, que servem para compreender de modo aprofundado as capacidades, processos de pensamento e dificuldades dos alunos (tarefas para investigação). (p. 14)

As tarefas têm uma grande importância no ensino da Matemática. Neste sentido, importa referir que, ainda que as tarefas proporcionem oportunidades fundamentais para o trabalho matemático, estas não têm a função de apresentar de forma direta os conceitos e os procedimentos matemáticos. Importa, por isso, reforçar que a aprendizagem dos alunos é resultado da atividade que realizam e não apenas das tarefas propostas (Ponte, 2014).

De facto,

> A natureza das atividades dos alunos na aula de Matemática é uma questão central no ensino desta disciplina. A aprendizagem da Matemática é sempre produto da atividade, e se esta se reduz, por exemplo, à resolução repetitiva de exercícios para aplicação de certas fórmulas, é exatamente isto que se aprende e vai perdurar, enquanto ficar a memória das fórmulas. (APM, 1988, pp.55-56)

Durante as últimas duas décadas, a pesquisa feita conduziu, essencialmente, a três grandes conclusões. Em primeiro lugar, alguns autores defendem que nem todas as tarefas promovem as mesmas oportunidades de aprendizagem para os alunos (Hiebert et. al, 1997; Stein, Smith, Henningsen & Silver, 2009). Em segundo lugar, tarefas desafiantes, que promovem o desenvolvimento do pensamento e do raciocínio matemático dos alunos, têm um contributo mais positivo na sua aprendizagem do que tarefas que envolvem apenas processos rotineiros. Em terceiro lugar, as tarefas mais desafiantes para os alunos são as mais difíceis de implementar em sala de aula e o seu caráter desafiante é, frequentemente, reduzido quando implementadas (NCTM, 2014).

Para além disso, o professor deve propor tarefas que contemplem Matemática correta e significativa, que recorram ao conhecimento dos interesses e das experiências dos alunos e que considerem as formas através das quais diferentes alunos aprendem Matemática. Ponte (2014) refere que:

> as tarefas a propor devem: envolver os alunos em atividades intelectuais; desenvolver as compreensões e capacidades matemáticas dos alunos; estimular os alunos a fazer ligações e a desenvolver um quadro coerente de ideias matemáticas; exigir a formulação e resolução de problemas e o raciocínio matemático; promover a comunicação acerca da Matemática; representar a Matemática como uma atividade humana em constante desenvolvimento; mostrar sensibilidade nas experiências e disposições dos alunos; e promover o desenvolvimento da disposição de todos os alunos para fazer Matemática. (Ponte, 2014, p. 17)

No seguimento dos aspetos referidos, para garantir que os alunos se empenhem num nível mais elevado de raciocínio, os professores devem implementar regularmente tarefas que promovam este tipo de competências. As tarefas selecionadas devem promover a aquisição de conhecimentos de diferentes formas, recorrendo a diferentes representações e ferramentas e motivando a utilização de diferentes estratégias na resolução de problemas (NCTM, 2014).

Os professores podem, ainda, criar tarefas matemáticas relacionadas com os conhecimentos prévios e as experiências dos alunos, recorrendo a diferentes elementos, como os seus contextos, a cultura, as condições e a língua. Este aspeto pode contribuir para que os alunos se sintam mais motivados e envolvidos na resolução destas tarefas e, consequentemente, nas suas aprendizagens matemáticas (NCTM, 2014).

Tendo em conta a importância que as caraterísticas de uma tarefa podem ter na aprendizagem dos alunos, importa referir que existe uma grande variedade de tarefas que podem ser propostas aos alunos. Smith e Stein (1998) desenvolveram um sistema de caraterização de tarefas, tendo em conta o nível de raciocínio necessário para a sua resolução. De acordo com estes critérios, existem quatro tipos de tarefas definidos a partir de dois níveis de exigência.

Com um reduzido nível de exigência, existem dois tipos de tarefas. Por um lado, as *tarefas de memorização*, que envolvem a reprodução de conhecimentos aprendidos, regras ou fórmulas ou a utilização de definições. Por outro lado, existem as t*arefas que envolvem procedimentos sem conexões*. Nestas, os procedimentos necessários para a sua resolução requerem pouco esforço cognitivo e são explícitos para o aluno, não tendo conexão com os conceitos em que se baseiam.

Com um elevado nível de exigência, existem dois tipos de tarefas. Por um lado, existem as *tarefas que envolvem procedimentos com conexões*, procurando aprofundar o nível de compreensão das ideias e dos conceitos matemáticos tratados. Este tipo de tarefas recorre ao uso de diferentes representações e requerem algum esforço cognitivo, uma vez que os procedimentos necessários para a sua resolução não podem ser realizados sem a compreensão dos mesmos. Por outro lado, temos as *tarefas com que se faz matemática*. Para isso, requerem um nível considerável de esforço cognitivo e promovem que os alunos explorem e compreendam a natureza dos conceitos, processos e relações abordados, sem explicitar ou sugerir a utilização de algum tipo de estratégia ou procedimento (Smith & Stein, 1998).

Importa considerar um sistema de classificação de tarefas tendo em conta o grau de desafio e o grau de estrutura, que são duas dimensões fundamentais da tarefa. O grau de desafio, que já é usado há muito tempo para classificar as tarefas em sala de aula, está relacionado com o nível de dificuldade de uma questão, podendo o nível de desafio variar entre reduzido e elevado. O grau de estrutura, que tem vindo a ser usado mais recentemente, varia entre os níveis: aberto e fechado. Podemos considerar que uma tarefa é fechada quando é dito aquilo que é dado e o que é pedido; enquanto uma tarefa aberta contempla alguma indeterminação no que é dado e/ou no que é pedido. As tarefas de estrutura fechada podem ser exercícios, com um nível de desafio reduzido, e problemas, com um nível de desafio elevado. As tarefas de estrutura aberta podem ser de exploração, com um nível de desafio reduzido, e de investigação, com um nível de desafio elevado (Ponte, 2005). As tarefas que apresentam um nível de desafio mais elevado contribuem para que o aluno tenha uma efetiva experiência matemática. As tarefas que apresentam um grau de estrutura mais aberto promovem o desenvolvimento de competências como a autonomia e a capacidade de trabalhar com contextos mais complexos (Ponte, 2014). Relativamente, ainda, ao nível de desafio, é interessante notar que a perceção que os alunos têm do nível de dificuldade e exigência de uma tarefa antes de começar a sua resolução tem um grande impacto na forma como estes avaliam o seu desempenho quando completam o processo de trabalho (Segers, Dochy & Cascallar, 2003)

Para além das dimensões referidas, há, ainda, dois aspetos de grande importância: a duração e o contexto (Ponte, 2005). Relativamente à duração, esta pode ser muito variada, podendo requerer minutos, dias, semanas ou, até, meses. Este é um aspeto que deve ser contemplado de acordo com os objetivos definidos e ponderado tendo em consideração os riscos associados. Por exemplo, as tarefas de longa duração podem promover aprendizagens mais aprofundadas, mas têm associado o risco de dispersão dos alunos, de frustração no seu trabalho ou, até, de abandono do processo de resolução da tarefa. Relativamente ao contexto, podemos considerar que os polos existentes são as tarefas enquadradas num contexto da realidade e as que são construídas a partir de termos puramente matemáticos. As tarefas que apresentam um contexto de realidade podem ser consideradas tarefas de modelação, apresentando, geralmente, um caráter problemático e desafiante (Ponte, 2005).

Podemos, então, concluir que, tendo em conta diversas dimensões, existem diversos tipos de tarefa:

> As tarefas são os projetos, questões, problemas, construções, aplicações e exercícios em que os alunos se envolvem. Elas fornecem os contextos intelectuais para o desenvolvimento matemático dos alunos. (NCTM, 1994, p.20)

De facto, a importância que assume na disciplina e o facto de providenciar estes contextos de trabalho matemático para os alunos permitem reconhecer que não é suficiente garantir um bom processo de seleção de tarefas. É necessário cuidar a forma como estas são propostas e como o seu processo de resolução é conduzido em sala de aula (Ponte, 2005).

As tarefas podem dar oportunidade de realização de atividade diversificada, mas isso depende da forma como é proposta aos alunos, da escolha do modo de trabalho dos alunos, da construção de um ambiente favorável à aprendizagem e, também, de experiências anteriores. Tal como já foi referido, é pela atividade realizada e pelo consequente processo de reflexão que o aluno pode aprender. No entanto, é fundamental compreender que esta aprendizagem depende de fatores igualmente importantes, como, especificamente, a tarefa e a situação didática que o professor consegue construir em sala de aula (Ponte, 2014).

É de fazer notar que a utilização de tarefas foi um aspeto contemplado no trabalho de cariz investigativo e, consequentemente, na escolha da unidade didática a lecionar. Neste sentido, é pertinente referir que a opção feita teve em consideração aspetos referidos anteriormente. De facto, num estudo realizado por Rebimbas, Rebimbas e Neto (2014) no ano letivo 2012/2013 sobre a unidade de Funções Exponenciais e Logarítmicas dos manuais escolares publicados, foi possível concluir que a apresentação de uma maior variedade de tarefas no ensino desta unidade poderia promover o desenvolvimento das competências previstas para o Ensino Secundário. Os autores referem que, para além de garantir essa diversidade, pode ser importante desenvolver tarefas de caráter exploratório, considerando aspetos como a conjetura, a argumentação e a modelação matemática (Rebimbas, Rebimbas & Neto, 2014). De facto, a disciplina de Matemática no ensino secundário tem como principais finalidades a estruturação do pensamento, o desenvolvimento do raciocínio abstrato e a modelação e aplicação da Matemática ao mundo real (MEC, 2013).

As tarefas na avaliação formativa

A avaliação formativa, que, tal como já foi referido, orienta os alunos de acordo com objetivos de aprendizagem só pode ser desenvolvida através da utilização de tarefas que consigam promover estes objetivos e que, com a sua estrutura, ofereçam a oportunidade de obter informação relevante sobre a aprendizagem do aluno, tanto para o professor, como para os próprios alunos (Black & Wiliam, 1998).

Um dos principais aspetos que garantem que a aprendizagem dos alunos seja efetiva e de acordo com os objetivos definidos é a utilização de tarefas, considerando a sua construção e a sua proposta (Ames, 1992). De acordo com a autora, as tarefas devem contemplar diferentes interesses, promover um nível de desafio razoável e ter o seu foco em aspetos significativos para a aprendizagem do aluno, promovendo o desenvolvimento e utilização de estratégias de autorregulação.

Swan (2014) enfatizou a importância da relação entre o uso de tarefas em sala de aula e a avaliação formativa, referindo-a, até, como um dos princípios mais importantes a ter em consideração na construção e planificação das aulas em que as tarefas sejam propostas. De facto, a planificação de uma aula a partir da proposta de uma tarefa permite desenvolver diferentes aspetos relativos ao objetivo essencial da avaliação formativa: ajudar a aprender. A introdução da tarefa pretende ajudar os alunos a tornarem-se conscientes da sua capacidade intuitiva, criando curiosidade e explicitando, desde o início, quais são os objetivos de aprendizagem definidos e a forma como é esperado que o aluno trabalhe. O trabalho autónomo em pequenos grupos permite que os alunos troquem as suas ideias e verifiquem o trabalho realizado e as conclusões tiradas a partir daí. Depois de receber feedback, cada grupo tem oportunidade de olhar novamente para o trabalho realizado e compreender o que teriam feito de diferente e de que forma podem melhorar a sua resolução. A discussão em grande grupo permite que os alunos questionem o trabalho realizado nos diferentes grupos e tenham uma maior visão das estratégias possíveis no âmbito da tarefa proposta.

Silver e Smith (2015) defendem que a integração de um processo de avaliação formativo com o uso de tarefas pode contribuir para a melhor compreensão das aprendizagens matemáticas que os alunos realizam em sala de aula. Para isso, os autores apontam que as tarefas propostas devem: apresentar um nível de exigência cognitiva elevado; ser acessíveis a todos os alunos; ser construídas de acordo com os objetivos de aprendizagem definidos; motivar os alunos, contemplando contextos que lhes sejam familiares e questões às quais não seja possível responder de forma imediata; e revelar informação sobre o raciocínio e compreensão dos alunos, exigindo, em particular, que os alunos expliquem o seu processo de trabalho e reconheçam o significado dos resultados obtidos no contexto do problema. Para além disso, o trabalho de preparação das aulas assume um papel fundamental, nomeadamente em relação à previsão das estratégias utilizadas e dificuldades sentidas pelos alunos.

CAPÍTULO 3.
A UNIDADE DIDÁTICA

Modelos Exponenciais foi a subunidade didática escolhida para o desenvolvimento deste trabalho. Está inserida no domínio das Funções Exponenciais e Logarítmicas do Programa de Matemática A do Ensino Secundário. Esta escolha foi feita com a orientação do meu Professor Cooperante e tendo em conta a sua planificação anual. Assim, para que a intervenção letiva pudesse ser realizada durante o segundo trimestre e tendo em conta que as tarefas propostas neste âmbito poderiam ser adequadas para o fornecimento de feedback escrito, a escolha recaiu sobre este tópico. A partir desta escolha, foi desenvolvida a proposta pedagógica para o desenvolvimento deste trabalho.

Neste sentido, para compreender melhor a proposta pedagógica desenvolvida para os alunos, começarei por fazer uma apresentação do contexto escolar, fazendo uma caraterização da escola e da turma em que realizei a intervenção letiva. Em seguida, depois de fazer um enquadramento da unidade didática escolhida, considerando as finalidades e o programa da disciplina, apresentarei a proposta pedagógica, explicitando os objetivos de aprendizagem definidos e a articulação do feedback escrito durante as aulas lecionadas, justificando a seleção das tarefas propostas aos alunos e a sua relação com os tópicos da unidade abordada e fazendo referência aos recursos utilizados. Por fim, apresentarei uma breve descrição de cada uma das aulas lecionadas, realizadas a partir do processo de reflexão que fiz e das observações que me foram feitas pelos meus orientadores no final de cada uma das aulas.

Caraterização da Escola

O Colégio Pedro Arrupe está situado na Freguesia do Parque das Nações, pertencendo ao concelho de Lisboa, e foi inaugurado no dia 14 de Novembro de 2010.

De acordo com o seu projeto educativo, que assenta no legado da pedagogia inaciana e mantém laços sólidos com os colégios da Companhia de Jesus, a escola tem como missão:

> Ajudar a fazer desabrochar a personalidade única de cada aluno, segundo um ideal de formação integral e um harmonioso desenvolvimento físico, intelectual, afetivo, moral e espiritual (Colégio Pedro Arrupe, 2017, p.3).

Para além disso, apresenta a visão de:

> Formar homens e mulheres que se distingam pela preparação intelectual e o saber, mas ainda mais pelo ser, um ser feito de conhecimento e aceitação pessoal, reconhecimento pelos dons próprios, e responsabilização por os fazer render ao serviço dos outros em compromissos de construção de um mundo mais justo (Colégio Pedro Arrupe, 2017, p.3).

Em particular, o ensino secundário também está orientado de forma a promover o desenvolvimento integral do aluno associado ao seu crescimento em todas as dimensões, como alguém que aprende e deseja aprender (Colégio Pedro Arrupe, 2017).

A escola exerce a sua atividade desde o pré-escolar até ao ensino secundário, apresentando boas condições físicas e, também, um bom ambiente de trabalho e de aprendizagem. Tem capacidade para acolher cerca de mil e seiscentos alunos em instalações inseridas numa área de cerca de 72.000 m^2. É nesta área que se inserem dez edifícios. Nestes, existem, no total, 57 salas, que estão equipadas com um computador, projetor e quadro interativo. Para além destas, o Colégio é composto, ainda, por uma papelaria, um refeitório, duas bibliotecas, laboratórios, salas de informática, um bar, uma capela, um piso destinado aos professores, um ginásio, uma piscina e vários campos para a prática desportiva. No piso destinado aos professores, encontra-se o departamento de Matemática, composto por nove professores, que têm o hábito de trabalhar cooperativamente, trocando ideias sobre as suas práticas de ensino e assistindo e colaborando nas aulas dos seus colegas.

Caraterização da Turma

O estudo foi desenvolvido numa turma de 12.º ano, que pertence ao Curso de Ciências e Tecnologias. É formada pelos alunos que, nos 10.º e 11.º anos optaram por ter a disciplina de Geometria Descritiva. É constituída por treze alunos de nacionalidade portuguesa, dos quais cinco (38%) são raparigas e oito (62%) são rapazes. Este grupo de alunos fez o seu percurso ao longo do ensino secundário sempre em conjunto, que é um dos aspetos que pode justificar o bom ambiente de trabalho em sala de aula. Ainda assim, no início do 10.º ano, a turma tinha 18 alunos, sendo que, ainda antes do final desse ano letivo, dois dos alunos mudaram de curso e, no final, um aluno ficou retido e outro transferiu-se de escola. A turma inicia o 11.º ano com 14 alunos e, no final desse ano, uma aluna muda de curso. Segundo o meu professor cooperante, a turma manteve um bom desempenho na disciplina ao longo de todo o ensino secundário:

> A turma apresentou, desde cedo, um bom desempenho na disciplina de Matemática A. As classificações finais do 9.º ano que apresentavam também davam indicação disso mesmo. Conseguiram adaptar-se ao ritmo do ensino secundário, com um maior volume de conteúdos para dominar, bem como um grau de complexidade maior, introduzido pelas novas metas curriculares, em comparação com o programa anterior. (Professor titular da turma, conversa informal)

De uma forma geral, e a partir da observação feita, os alunos são interessados e motivados na sua aprendizagem. São, também, participativos e mostram, na sua maioria, que sabem estar dentro de uma sala de aula com responsabilidade e autonomia. Todos estes aspetos acabam por se refletir nos bons resultados académicos que a maioria dos alunos consegue obter (Gráfico 1). De facto, a turma apresenta uma boa classificação média, tendo sido de, aproximadamente, 16.1 valores no final do primeiro trimestre e de, aproximadamente, 16.2 valores no final do segundo trimestre. A nível individual, as classificações finais obtidas no final dos primeiro e segundo trimestres foram as seguintes:

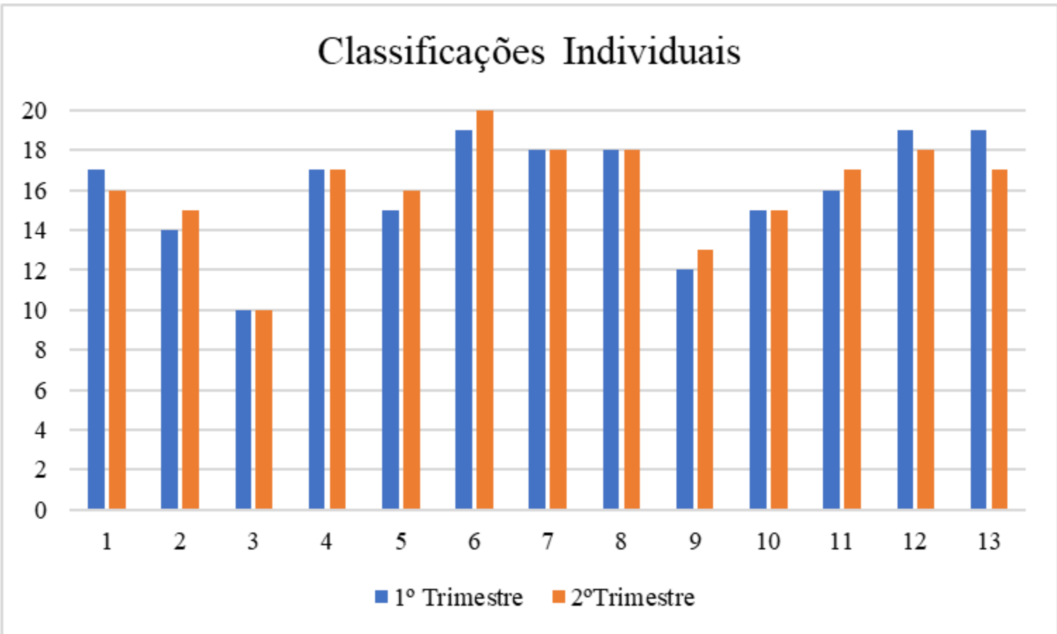


Gráfico 1: Classificações individuais nos 1º e 2º períodos letivos a Matemática em 2017/18

A partir da leitura do Gráfico 1, podemos verificar que nenhum aluno da turma obteve uma classificação negativa. Os dois alunos com mais dificuldades apresentam classificações de 10 (e 10) e 12 (e 13) no primeiro (e segundo) trimestre. Para além disso, observa-se que os restantes elementos da turma apresentam classificações iguais ou superiores a 14 valores nos trimestres considerados.

Dada a pequena dimensão da turma, todos os alunos são envolvidos no trabalho desenvolvido em sala de aula, para além de que este aspeto permite que o professor consiga acompanhar de forma próxima cada um dos seus alunos. Neste sentido, todos os alunos estão habituados a participar ativamente em cada aula de Matemática, seja por sua iniciativa ou por solicitação do professor, tal como refere o meu professor cooperante:

> Em sala de aula, o número reduzido de alunos permitiu que, nos momentos de exposição de novos conteúdos, fosse sempre possível ouvir todos os alunos. Facilitou muito os momentos de trabalho autónomo, em que os alunos podiam formar pares ou não, na resolução de exercícios. (Professor titular da turma, conversa informal)

Uma vez que o incentivo feito à participação dos alunos é grande e que estes já estabeleceram laços de amizade entre si, existem, por vezes, alguns momentos de dispersão, com algumas conversas entre os alunos menos adequadas no contexto de sala de aula. Ainda assim, é visível a preocupação que apresentam com os colegas e a genuína atenção e consequente iniciativa de ajudar.

Para a planificação da proposta pedagógica realizada no âmbito deste trabalho, importa referir que os alunos desta turma têm, na disciplina de Matemática A, uma carga semanal de seis horas, distribuídas como sugere a Tabela 1:

Tabela 1: Horário semanal da turma em Matemática

	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta
08h15 - 09h15		Matemática A			
09h25 - 10h25		Matemática A			Matemática A
10h50 - 11h50			Matemática A		
12h00 - 13h00			Matemática A	Matemática A	
14h30 - 15h30					

Ancoragem da Unidade Didática

O domínio das Funções Exponenciais e Logarítmicas é abordado apenas no Ensino Secundário, no 12.º ano. Os alunos começam por estudar o cálculo dos juros compostos, introduzindo, depois e a partir daí, o número de Neper (MEC, 2013).

Em seguida, estudam-se as propriedades da função exponencial $f(x) = a^x$, definida no conjunto dos números racionais, com $a > 0$. Neste tópico, mostra-se de forma cuidada, através de passagens ao limite e de alguns resultados intuitivos, que este tipo de função se pode estender ao conjunto dos números reais, mantendo, essencialmente, as mesmas propriedades algébricas. O cálculo da derivada da exponencial é introduzido a partir do limite notável $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

As funções logarítmicas são introduzidas como funções inversas das funções exponenciais. Este tipo de abordagem contribui para estabelecer, a partir das já conhecidas propriedades das funções exponenciais, as propriedades algébricas e analíticas das funções logarítmicas.

Por fim, abordam-se problemas que relacionam este tipo de funções, à luz de fenómenos como a evolução de certas populações, a temperatura de determinados sistemas ou o decaimento de uma substância radioativa.

Conteúdos Matemáticos envolvidos

Um modelo matemático é a descrição de um sistema usando conceitos e linguagem matemáticos. O processo de desenvolvimento de um modelo deste tipo é denominado de modelação. Com um modelo, é possível explicar o funcionamento de um sistema e estudar os efeitos das suas diferentes componentes, para além de fazer previsões sobre o seu comportamento (Ugwa & Agwu, 2012).

Modelos Matemáticos

As funções exponenciais desempenham um papel fundamental na modelação de situações relativas a diferentes áreas, tais como Economia e Finanças, Ciências Sociais e Biologia, entre outras. Por exemplo, podem ser usadas para determinar o valor de um investimento e dos seus juros, para prever a dimensão de uma população ou, ainda, e tal como veremos na primeira tarefa desta intervenção, para determinar a quantidade de medicamento no sangue ao longo do tempo depois de este ser tomado (Teixeira, Precatado, Albuquerque, Antunes & Nápoles, 2006).

Algumas grandezas seguem uma evolução aproximadamente exponencial. Nesses casos, é adequado considerar que esta evolução pode ser modelada por uma função exponencial.

Existem, também, determinadas grandezas cuja evolução é de tal forma que, a cada instante, a taxa de variação é aproximadamente proporcional à quantidade de grandeza presente. Nesse caso, a função f que modela esta grandeza satisfaz a igualdade:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = k, \qquad k \in \mathbb{R}$$

ou, de forma equivalente, f é solução da equação diferencial de primeira ordem

$$f'(x) = k \cdot f(x), \qquad k \in \mathbb{R}$$

pelo que $f(x) = e^{kx},\ k \in \mathbb{R}$.

Modelos Populacionais

<u>Modelo exponencial</u>

Consideremos um modelo que traduz a evolução de uma certa população que está apenas dependente do número de nascimentos (N) e mortes (M) que se vão verificando. Nesse caso, podemos supor que o número de nascimentos e mortes que se verificam por unidade de tempo é, em média, proporcional ao número de indivíduos existente (Negra, Martinho & Martins, 2017). Nesta relação de proporcionalidade, podemos considerar as constantes $N > 0$ e $M > 0$. Assim, designando por $P(t)$ a população que existe no instante t, num período de tempo h, tem-se que:

$$P(t+h) = P(t) + h \cdot (N - M) \cdot P(t)$$

Nesse caso,

$$\frac{P(t+h) - P(t)}{h} = (N - M) \cdot P(t)$$

e, passando ao limite quando $h \to 0$,

$$P'(t) = (N - M) \cdot P(t)$$

Esta expressão é da forma já referida acima

$$f'(x) = k \cdot f(x)$$

sendo $k = N - M$.

Neste contexto, designamos as contantes N e M por taxas médias de natalidade e mortalidade, respetivamente. Neste sentido, também designamos a constante $N - M$ por taxa média de crescimento.

Então, P é solução de uma equação diferencial de primeira ordem,

$$P(t) = P_0 \cdot e^{(N-M)(t-t_0)}$$

sendo P_0 a população no instante inicial, t_0.

Assim, se $N - M > 0$, a população crescerá de forma exponencial, e, se $N - M < 0$, a população tenderá para a sua extinção, também de forma exponencial.

Modelo logístico

Verifica-se que o modelo exponencial é inadequado em várias situações. Isto acontece porque assumimos que a evolução da população estava apenas dependente das taxas médias de natalidade e mortalidade. Isto pode não acontecer, uma vez que existem outros fatores que podem ter impacto na evolução de uma população. Por exemplo, quando uma população cresce, verifica-se um aumento da densidade populacional, que pode contribuir para que as condições de vida piorem, o que, por sua vez, pode travar a natalidade e aumentar a mortalidade.

Neste tipo de situações, o modelo mais realista terá de ser diferente, tendo que prever um limite máximo para a população e uma desaceleração da variação da população quando esta se aproxima do limite máximo (Bacaër, 2011).

Desta forma, um modelo adequado é o modelo logístico, introduzido na segunda tarefa da intervenção letiva. Este modelo prevê que a variação da população seja proporcional ao produto

$$P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{P_\infty}\right)$$

em que P_∞ é o número máximo de indivíduos suportado pela região.

Isto significa que, segundo o modelo logístico, a variação da população é traduzida pela seguinte expressão:

$$P'(t) = \alpha \cdot P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{P_\infty}\right), \qquad \alpha > 0$$

Então, as soluções desta equação, que traduzem a evolução da população são dadas por expressões da forma:

$$P(t) = \frac{P_\infty}{1 + \frac{P_\infty - P_0}{P_0} e^{-\alpha t}}$$

em que P_0 é a população no instante inicial, t_0.

Como no início se parte de uma população muito pequena face a P_∞ tem-se que $P'(t) \cong \alpha \cdot P(t)$, pelo que $P(t) \cong P_0 e^{\alpha t}$ e o crescimento é muito parecido com um crescimento exponencial. À medida que t aumenta, a população aproxima-se assintoticamente de P_∞.

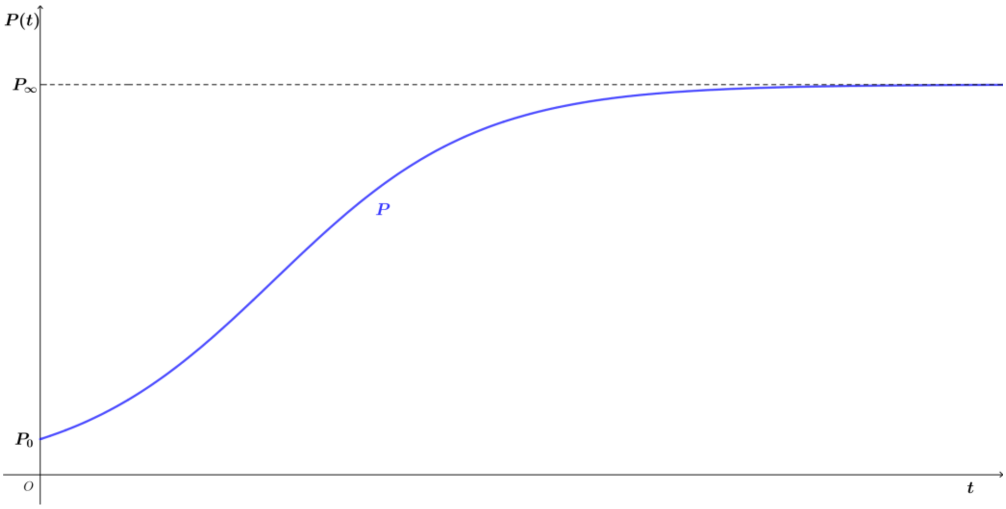


Figura 1: Representação gráfica do modelo logístico

Lei de Arrefecimento de Newton

Considere-se uma situação em que um corpo arrefece num meio onde a temperatura ambiente é constante. Nesse caso, verifica-se que a evolução da sua temperatura ao longo do tempo obedece à Lei de Arrefecimento de Newton, que é abordada na terceira tarefa de grupo realizada em sala de aula. Esta lei refere que a taxa de variação da temperatura de um objeto é proporcional à diferença entre a temperatura do meio envolvente e a temperatura do objeto.

Esta relação pode ser traduzida pela seguinte equação

$$T'(t) = k \cdot \left(T_a - T(t)\right)$$

em que T_a representa a temperatura ambiente, que é constante, e T a função que descreve a temperatura do objeto, medida em $°C$, em cada instante t, numa qualquer unidade de tempo (Teixeira, Precatado, Albuquerque, Antunes & Nápoles, 2006).

Pondo

$$f(t) = T_a - T(t)$$

tem-se que

$$f'(t) = -T'(t)$$

Desta forma, obtemos uma equação diferencial de primeira ordem

$$f'(t) = -k \cdot f(t)$$

Assim,

$$f(t) = C \cdot e^{-kt}$$

$$\Leftrightarrow T_a - T(t) = C \cdot e^{-kt}$$

$$\Leftrightarrow T(t) = T_a - C \cdot e^{-kt}$$

Sabendo que, para $t = 0$, se tem que $T(0) = T_0$, então

$$T(0) = T_a - C \cdot e^{-k\times 0}$$

$$\Leftrightarrow T_0 = T_a - C$$

$$\Leftrightarrow C = T_a - T_0$$

Podemos, finalmente, obter a expressão função que traduz a temperatura do objeto num instante t:

$$T(t) = T_a - (T_a - T_0) \cdot e^{-kt}$$

sendo k uma constante real que está dependente do objeto.

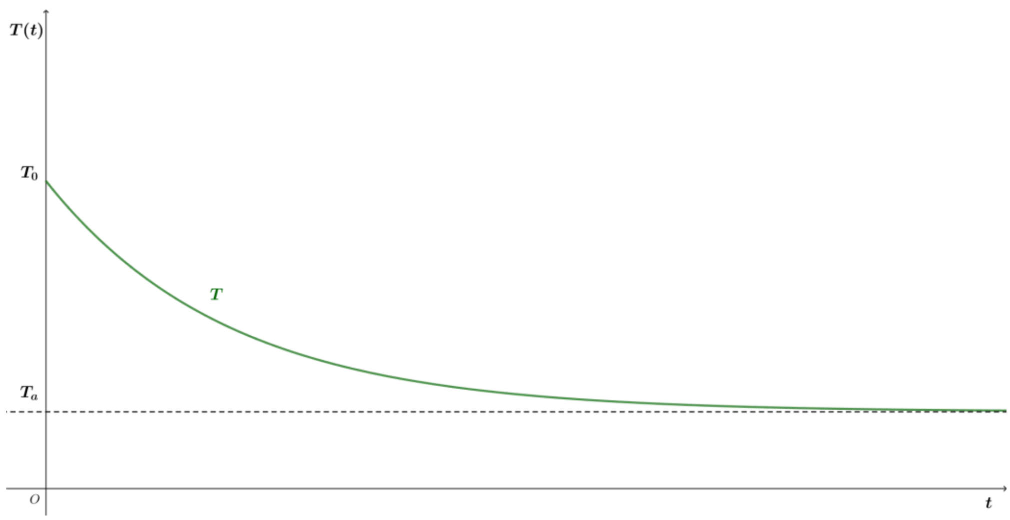


Figura 2: Representação gráfica da função T

Orientações Curriculares

Na elaboração da proposta pedagógica, foram tidas em consideração as orientações curriculares dadas pelo programa da disciplina em vigor (MEC, 2013) e pelas respetivas metas curriculares. Estes aspetos foram importantes na definição dos objetivos de aprendizagem e na escolha de estratégias adequadas, como a construção das tarefas propostas, para a abordagem dos tópicos visados.

Assim, no programa de Matemática A do 12.º ano, é possível reconhecer a importância de abordar a equação diferencial de primeira ordem, que estabelece a relação entre uma determinada grandeza e a sua taxa de variação. O programa contempla, ainda, a resolução de problemas que envolvam esta relação (MEC, 2013). Os descritores presentes neste documento são os seguintes (Quadro 1):

Quadro 1: Descritores do programa de Matemática A (MEC, 2013, p. 25)

Modelos Exponenciais
A equação $f' = kf,\ k \in \mathbb{R}$, enquanto modelo para o comportamento da medida de grandezas cuja taxa de variação é aproximadamente proporcional à quantidade de grandeza presente num dado instante (evolução de uma população, da temperatura de um sistema ou do decaimento de uma substância radioativa);
Soluções da equação $f' = kf,\ k \in \mathbb{R}$;
Resolução de problemas de aplicação, envolvendo a equação $f' = kf,\ k \in \mathbb{R}$.

Nas metas curriculares relativas a este tópico didático, podemos verificar que se pretende que o aluno conheça a equação diferencial de primeira ordem, que saiba que a evolução de certas grandezas pode ser traduzida por uma equação e que reconheça a função exponencial como uma solução deste tipo de equações. Para além disso, as metas sugerem que os alunos devem ser capazes de resolver problemas que envolvam funções exponenciais e as suas propriedades, que exijam o estudo de funções deste tipo e que contemplem a modelação de sistemas por equações diferenciais de primeira ordem (MEC, 2013). As metas presentes no documento são as seguintes (Quadro 2):

Quadro 2: Metas Curriculares de Matemática A (MEC, 2013, p. 55)

Modelos Exponenciais
Saber que a evolução de determinadas grandezas, como a massa de uma substância, a temperatura de alguns sistemas ou o número de indivíduos de certas populações, pode ser modelada por uma «equação diferencial de 1.ª ordem» da forma $f' = kf,\ k \in \mathbb{R}$, que traduz o facto de, em cada instante, a taxa de variação ser aproximadamente proporcional à quantidade de grandeza presente.

Justificar, dado um número real k, que as funções $f(x) = ce^{kx}$, onde c é uma constante real, são soluções em $\mathbb{R}$ da equação diferencial $f' = kf$ e que todas as soluções desta equação são dessa forma, mostrando que dada uma qualquer solução f, tem derivada nula a função $e^{-kx} f(x)$.
Resolver problemas envolvendo as propriedades algébricas das funções exponenciais e logarítmicas.
Resolver problemas envolvendo o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais e logarítmicas, a determinação dos respetivos intervalos de monotonia bem como os extremos relativos e absolutos e a existência de assíntotas ao respetivo gráfico.
Resolver problemas envolvendo a modelação de sistemas por equações da forma $$y' = ky, \qquad k \in \mathbb{R}$$

Estratégias de Ensino

Tendo em conta as orientações curriculares apresentadas e os objetivos de aprendizagem definidos, desenvolvi uma proposta pedagógica que os respeitasse para além de permitir dar resposta às questões do estudo já apresentadas.

Em primeiro lugar, foi utilizada abordagem exploratória no desenvolvimento do trabalho em sala de aula, com as Tarefas 1, 2 e 3. Esta abordagem é centrada no trabalho do aluno e cria oportunidades de aprendizagem matemática significativa (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012).

O ensino exploratório exige mais do que a seleção das tarefas, sendo geralmente estruturada em diferentes fases (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012). Assim, numa primeira aula, fez-se a introdução à tarefa e os alunos tiveram o primeiro momento de trabalho autónomo para a sua resolução, no fim do qual entregaram uma produção escrita. Forneci alguns comentários para que, na aula seguinte, os alunos tivessem a oportunidade de melhorar o seu trabalho, com um segundo momento de trabalho autónomo, entregando uma nova versão do seu trabalho. No fim deste momento, e em turma, realizava-se a discussão da tarefa e a síntese das principais conclusões obtidas.

Em segundo lugar, propus diferentes tipos de tarefas durante a intervenção letiva. No trabalho a realizar em sala de aula, propus tarefas exploratórias e problemas e, a realizar em casa, propus exercícios de consolidação dos conhecimentos. Estas tarefas apresentam graus de desafio e estrutura diferentes. Para além do trabalho com conceitos e procedimentos matemáticos, a proposta de diferentes tipos de tarefas pode contribuir positivamente para a forma como o aluno constrói o seu conhecimento (Ponte, 2014).

Em terceiro lugar, o método de trabalho dos alunos foi uma opção ponderada de acordo com o tipo de tarefas propostas durante a intervenção letiva. A sequência de aulas contemplou a introdução de cinco tarefas diferentes, das quais três foram realizadas em grupo e as duas restantes foram realizadas individualmente, tendo sido propostas como trabalho de casa. Em sala de aula, pretendeu-se fomentar o trabalho cooperativo, que é uma forma eficaz de promover a aprendizagem significativa de conceitos matemáticos (Guerreiro & Portugal, 2006).

Considerando que o propósito do estudo era estudar o contributo do feedback escrito nas aprendizagens matemáticas dos alunos, uma forma por excelência de desenvolver uma avaliação formativa (Sadler, 2010), umas das principais estratégias de ensino utilizadas foi a possibilidade dada aos alunos de melhorarem o seu trabalho depois de receberem feedback escrito, entregando-o de novo.

Assim, podem ser definidas três fases importantes na realização de cada uma destas tarefas: (i) numa primeira fase, os alunos resolveram a tarefa, entregando uma produção escrita com o trabalho desenvolvido; (ii) numa segunda fase, forneci comentários escritos relativos à produção escrita que entregaram no final do primeiro momento de trabalho; (iii) e, finalmente, numa terceira fase, os alunos receberam a primeira versão do seu trabalho com os respetivos comentários escritos, tendo a possibilidade de melhorar o seu trabalho durante um segundo momento de trabalho, no final do qual puderam entregar uma nova versão da sua produção escrita.

As duas tarefas realizadas individualmente foram propostas como trabalho de casa (TPC 1 e TPC 2). Estas foram introduzidas no final de uma aula, tendo resultado na seleção de alguns exercícios propostos pelo manual adotado pela escola. Os alunos resolveram os exercícios propostos, entregando a sua produção escrita na aula seguinte. Inicialmente, a planificação previa que, depois de fornecer comentários escritos, existisse tempo em aula para que os alunos melhorassem o seu trabalho, entregando, no final desse momento de trabalho, uma nova versão do seu trabalho. No entanto, tal como irei explicar adiante, uma redução do número de aulas disponíveis provocou algumas adaptações desse plano. Assim, os alunos entregaram a sua produção escrita do primeiro trabalho de casa (TPC 1) a fim de receberem feedback escrito. Estas produções escritas foram devolvidas aos alunos, devidamente comentadas na aula seguinte. No entanto, em vez de estes terem um momento de trabalho em sala de aula para a melhoria do seu trabalho, foi-lhes pedido que o fizessem em casa, trazendo uma nova versão do seu trabalho na aula seguinte. Relativamente ao segundo trabalho de casa (TPC 2), os alunos receberam a produção escrita do seu trabalho devidamente comentada, tendo tido, em sala de aula, um momento de trabalho para a melhoria do mesmo. A planificação inicial previa que este momento para a melhoria das produções escritas dos trabalhos de casa fosse realizado em sala de aula uma vez que, para além de o feedback escrito ser sempre complementado com feedback oral, era a oportunidade de recolher informação sobre a forma como os alunos compreendiam e utilizavam os comentários escritos que recebiam. Assim, importa referir que esta alteração na planificação provocou alguma perda de informação.

Em quarto lugar, no início das primeiras seis aulas, e uma vez que estas contemplaram sempre um momento de trabalho autónomo em grupo, a sala de aula foi previamente arrumada e organizada. Esta foi uma estratégia escolhida de gestão do trabalho em sala de aula para facilitar a entrada dos alunos em aula e o início do momento de trabalho autónomo, contribuindo para que este fosse bem aproveitado. Na sétima e última aula, uma vez que esta contemplava apenas momento de trabalho autónomo individual, garanti que a sala estava devidamente arrumada e organizada, visando, da mesma forma, promover o início do trabalho dos alunos.

Por fim, em último lugar, no início de todas as aulas lecionadas, optei por ter o sumário já projetado no quadro interativo quando os alunos entravam na sala. Este aspeto permitia que os alunos fizessem este registo de forma autónoma e rápida e tomassem consciência do trabalho que iam desenvolver, contribuindo, também, para o rápido início dos momentos planeados das diferentes aulas.

Tarefas

Tendo em conta o propósito deste estudo, importa conhecer o significado que os alunos atribuem ao feedback nos diferentes tipos de trabalho que lhes podem ser pedidos. Uma vez que diferentes tipos de tarefas pedem aos alunos diferentes tipos de trabalho, foram propostas cinco tarefas aos alunos durante esta intervenção letiva.

Tal como já foi referido, as duas tarefas realizadas individualmente que foram propostas para casa resultaram da seleção de exercícios que estão contemplados no manual adotado pela escola. Este é o tipo de trabalho que os alunos mais frequentemente desenvolvem nas aulas de Matemática A.

As três tarefas realizadas em grupo foram construídas propositadamente para esta intervenção letiva, de acordo com os objetivos de aprendizagem definidos. Tal como já foi referido, para cada uma das tarefas, os alunos dispunham de dois momentos de trabalho autónomo e de um momento de discussão, sendo realizados ao longo de duas aulas.

<u>Tarefa 1</u> – “Para um sono de beleza…”

A primeira tarefa (Anexo 1) pretende fazer uma abordagem inicial ao estudo de modelos exponenciais, representando uma oportunidade de aprendizagem na resolução de problemas que envolvem funções exponenciais, fazendo recurso às suas propriedades. A grande prioridade da tarefa é apresentar um contexto real que os alunos conseguissem relacionar com o seu quotidiano e no qual, a partir da sua experiência, pudessem encontrar aplicabilidade da Matemática e dos tópicos abordados, compreendendo o seu valor. Para isso, os alunos devem fazer uso dos conhecimentos prévios que têm sobre a definição de função exponencial e a sua monotonia. Para além disso, a importância da calculadora gráfica torna-se bastante evidente, enquanto instrumento de visualização das diferentes funções e, no contexto do problema, como forma de comparação entre os efeitos dos diferentes fármacos, ainda que de uma forma mais geral e de uma perspetiva qualitativa.

A primeira pergunta pretende que os alunos interpretem o enunciado e compreendam que, para que cada um dos fármacos apresentados seja considerado um medicamento para dormir, tem de ter o efeito descrito. Neste sentido, é referido no enunciado que o medicamento para dormir deve ter o seu efeito durante a noite permitindo que o indivíduo acorde no dia seguinte sem sentir sonolência. Compreendendo o enunciado no contexto do problema, os alunos têm de procurar o fármaco cuja função não traduzisse este tipo de efeito. Aqui, também se pretende também que os alunos possam conciliar as perspetivas analítica e gráfica, ainda que possam optar apenas entre uma fundamentação analítica ou gráfica. De um ponto de vista analítico, os alunos podem recorrer ao conhecimento prévio das propriedades da função exponencial ou ao estudo da sua monotonia. A partir daí, podem concluir que a concentração de medicamento de um dos apresentados cresce sempre ao longo do tempo, pelo que não possui o efeito desejado uma vez que, no contexto do problema, o indivíduo ficaria a dormir indefinidamente. De um ponto de vista gráfico, os alunos podem observar, e até na mesma janela, as funções que traduzem a concentração de cada um dos medicamentos apresentados no sangue. A partir desta visualização, os alunos têm argumentos para fundamentar a sua resposta.

A segunda pergunta propõe um aprofundamento da exploração começada na resolução da pergunta anterior. De facto, ainda que essa exija a compreensão do enunciado, pede que cheguem a uma conclusão, existindo apenas uma resposta correta. Esta pergunta não pretende que os alunos cheguem todos a uma mesma conclusão, mas antes que saibam fazer uso dos conhecimentos que possuem sobre funções exponenciais para investigar as hipóteses que considerem pertinentes e, a partir daí, apresentar algumas conclusões. É proposto aos alunos que desenvolvam a sua capacidade de trabalhar em problemas de contexto real. Para isso, os alunos têm de aprender a trabalhar com funções exponenciais, através das quais, neste caso, poderão fundamentar devidamente as suas respostas. Neste sentido, é importante que, para além de terem conhecimento dos tópicos abordados neste domínio, os alunos desenvolvam a capacidade de estabelecer relações entre os tópicos abordados e o seu significado.

A terceira pergunta pretende fazer uma proposta que saia um pouco do contexto trabalhado nas duas primeiras perguntas. De facto, ao contrário das situações trabalhadas anteriormente, que apresentavam uma concentração inicial de medicamento constante, a situação apresentada nesta pergunta sugere uma alteração, de hora a hora, na concentração inicial de medicamento. De forma subtil, esta pergunta vai introduzir um novo modelo exponencial, caracterizado por diferentes ramos de funções exponenciais. A compreensão da situação apresentada implica que os alunos compreendam bem o enunciado e que saibam adaptar as indicações aí dadas segundo as novas condições, construindo esta nova função. Não se pretende necessariamente que os alunos obtenham a expressão algébrica desta nova função, uma vez que poderão chegar às mesmas conclusões através de uma estratégia de caráter mais gráfico. Pretende-se antes que os alunos consolidem a capacidade de estabelecer relações entre um enunciado e os tópicos matemáticos relevantes e pertinentes.

<u>Tarefa 2</u> – “Nem tudo o que vem à rede é peixe!”

A segunda tarefa (Anexo 2) pretende fazer uma introdução ao modelo logístico a partir do modelo exponencial, que era o único modelo conhecido pelos alunos até este momento. Assim, os alunos podem fazer uso dos conhecimentos que possuem deste tipo de funções na exploração deste novo e diferente modelo. Também se pretende proporcionar a oportunidade de estudar uma situação em que tanto o modelo logístico como as suas diferenças relativamente ao modelo exponencial tenham significado. Para isso, construí esta tarefa a partir de um exemplo que o meu professor cooperante costuma utilizar para a introdução do modelo logístico. No início, tendo em conta as orientações curriculares desta unidade didática, pareceu relevante tornar evidente a relação de proporcionalidade direta entre a função exponencial e a sua derivada, promovendo a melhor compreensão de outros modelos exponenciais que venham a ser introduzidos, como o da Lei de Arrefecimento de Newton. Nesta resolução, o recurso à calculadora gráfica permite-nos reconhecer a importância de potencialidades como a de regressão ainda que, e tal como irei explicar adiante, também mostre os cuidados a ter na obtenção de modelos adequados a um determinado conjunto de dados. Para além disso, considera-se ainda uma grande prioridade a escolha de um contexto real que, à semelhança daquele que foi apresentado na primeira tarefa, possa ser bem compreendido pelos alunos.

A primeira pergunta pretende, tal como já foi referido tornar clara a relação de proporcionalidade direta entre a função exponencial e sua derivada. Na verdade, a resolução desta pergunta não apresenta um grande nível de dificuldade uma vez que se traduz, apenas, na obtenção da expressão da derivada da função apresentada. A conclusão de que a relação entre as duas funções é de proporcionalidade direta pretende promover uma nova perspetiva sobre a equação obtida, permitindo a introdução da equação diferencial de primeira ordem. Neste sentido, e tendo em conta que todo trabalho desenvolvido teve por base a função exponencial, os alunos poderão compreender, de forma natural, que a função exponencial satisfaz aquela equação, isto é, que a função exponencial é solução de uma equação deste tipo. Havendo a grande prioridade de trabalhar em contextos reais, seria redutor introduzir uma ideia como esta sem o devido significado. É nesse sentido que se propõe que o aluno expresse, no âmbito de uma situação concreta, o significado desta relação. Pretende-se que, posteriormente, a partir da expressão de uma relação deste tipo num enunciado, o aluno seja capaz de a associar imediatamente este tipo de funções.

A segunda pergunta pretende fazer a já referida introdução do modelo logístico, partindo do modelo exponencial, podendo, por isso, ser dividida em duas partes.

Para isso, na primeira parte, é apresentado um conjunto inicial de dados, relativos à quantidade de sardinha pescada. É a partir deste conjunto de dados que é pedido aos alunos que, através da potencialidade de regressão, determinem o modelo exponencial mais adequado (Figura 3). A utilização desta potencialidade permite que os alunos tomem consciência de que não existe apenas a regressão linear e do significado que este processo tem na obtenção de funções que sejam adequadas a determinados conjuntos de dados.

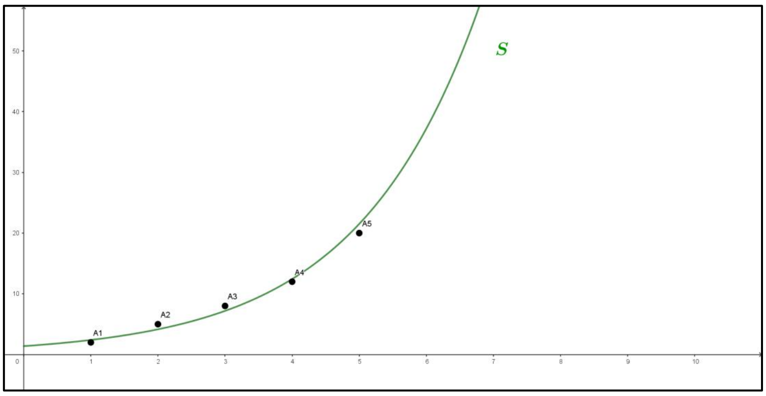


Figura 3: Janela de visualização da regressão exponencial

A segunda parte desta pergunta apresenta a introdução ao modelo logístico. Para isso, são acrescentados novos dados ao conjunto apresentado no início. Quando, com recurso à calculadora, são acrescentados à visualização gráfica, fica claro que o modelo definido anteriormente já não é adequado (Figura 4). Para garantir que os alunos compreendem este aspeto, é pedido que comentem a adequabilidade do modelo definido ao novo conjunto de dados. Isto também permite alertar os alunos para os cuidados que é necessário ter no trabalho com regressões.

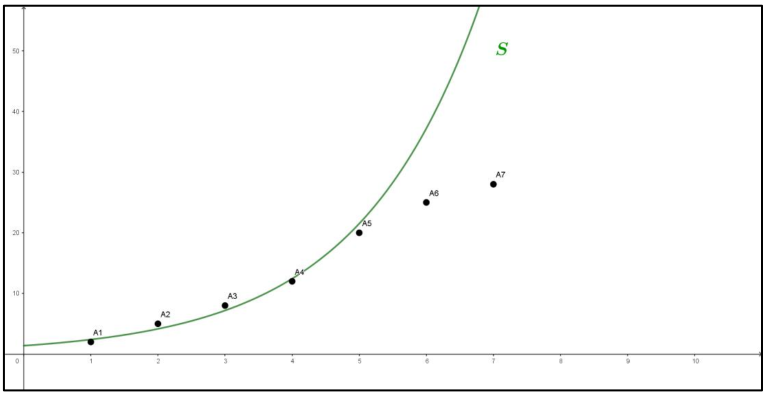


Figura 4: Janela de visualização da regressão exponencial com os novos dados

Neste caso, é pedido que os alunos façam previsões (através de estratégias como a substituição de valores, a análise gráfica ou o estudo de monotonia da função) da quantidade de sardinha pescada em anos distante do conjunto de dados conhecido. É neste sentido que o modelo logístico é introduzido, sendo apresentado como um tipo de modelo que pode ser mais adequado à nova situação do que o modelo exponencial. A versatilidade da calculadora gráfica é reforçada com recurso a uma nova potencialidade de regressão, que apresenta um modelo logístico adequado à situação em estudo (Figura 5).

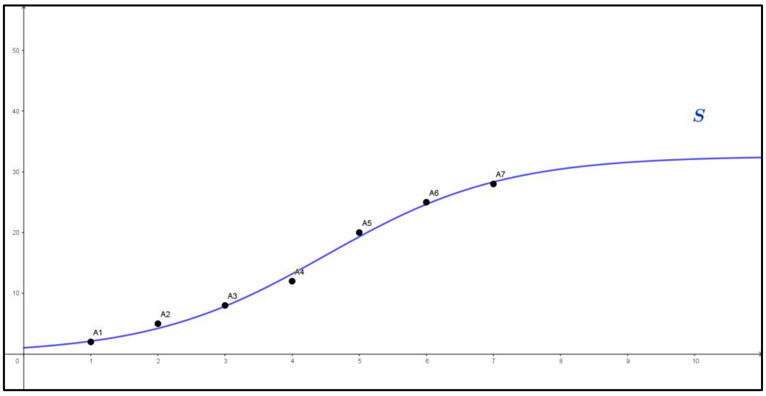


Figura 5: Janela de visualização da regressão logística

Por fim, é proposto que os alunos atribuam significado ao facto de a nova função obtida ser limitada. De facto, ainda que, à semelhança do modelo exponencial, seja monotonamente crescente, o seu limite é um valor real. No contexto do problema, é possível compreender que, tratando-se de uma situação de pesca com recursos finitos, a quantidade de sardinha pescada não poderia ser traduzida por um crescimento exponencial ao longo do tempo.

<u>Tarefa 3</u> – "Newton e o café"

A terceira tarefa (Anexo 3) pretende abordar de forma mais explicita o tópico da equação diferencial de primeira ordem, aprofundando os objetivos de aprendizagem definidos em consonância com as orientações curriculares existentes para esta unidade didática. Desta forma, pretende-se que os alunos possam recordar o trabalho desenvolvido na resolução das duas primeiras tarefas, em particular o facto de a função exponencial ser solução de uma equação deste tipo. Existe, ainda, uma articulação entre as duas perguntas apresentadas uma vez que a dedução pedida na primeira contribui para uma nova perspetiva na resolução da segunda. Para além disso, pretende-se que os alunos tenham a oportunidade de trabalhar numa situação de modelação de uma função, sendo referidos diferentes dados no enunciado.

A primeira pergunta apresenta um nível de dificuldade elevado. Além de exigir que os alunos recordem o trabalho realizado, o processo de dedução da expressão da temperatura contempla alguns aspetos de manipulação de funções, como a necessidade de definir novas funções, que não são intuitivos para a maioria dos alunos. Pretende-se que os alunos acompanhem o processo de dedução de uma expressão que lhes poderia ter sido simplesmente apresentada para utilização no contexto da resolução de problemas.

Para isso, é enunciada a Lei de Arrefecimento de Newton, sendo pedido aos alunos que obtenham a expressão da temperatura de um objeto que verifica as condições descritas. O desenvolvimento de uma estratégia de trabalho como esta permite que os alunos atribuam significado ao que está a ser feito, compreendendo que a expressão é uma consequência da relação de proporcionalidade direta existente entre a temperatura e a sua taxa de variação, e desenvolvam a capacidade de manipulação e obtenção de funções, sem que estas sejam simplesmente apresentadas e decoradas.

A segunda pergunta pretende introduzir um novo modelo exponencial, relativo à Lei de Arrefecimento de Newton. Esta introdução é feita com recurso ao trabalho desenvolvido na primeira pergunta uma vez que a relação de proporcionalidade direta expressa no enunciado é a conhecida lei de Newton. Neste sentido, é proposta uma situação problemática sobre a temperatura de um café que se encontra a arrefecer no balcão de uma pastelaria, sendo pedido aos alunos que explorem o contexto nas diferentes alíneas. Importa notar o interesse de salientar a relação entre duas áreas como a Matemática e a Física, que os alunos reconhecem uma vez que a turma pertence ao curso de Ciências e Tecnologias, tendo todos os alunos optado por ter a disciplina de Física no 12º ano. As diferentes alíneas apresentadas para esta pergunta pretendem que o aluno possa explorar o contexto de uma situação concreta, como o caso da temperatura de um café numa pastelaria. Tendo em conta o trabalho realizado na pergunta anterior, pretende-se que os alunos o possam fazer com recurso a diferentes estratégias, procurando garantir que os alunos compreendem o significado, no contexto do problema, dos processos matemáticos a que recorrem.

<u>TPC</u> (1 e 2)

Os exercícios propostos para trabalho individual em casa (Anexo 4) foram selecionados do manual adotado pela escola. Estas tarefas pretenderam consolidar os conceitos trabalhados em sala de aula e proporcionar aos alunos momentos de trabalho autónomo. Verificou-se que, a partir deste trabalho, os alunos identificaram dificuldades relativas a esta unidade didática.

Recursos

Para o trabalho desenvolvido pelos alunos durante a intervenção letiva, foram utilizados diferentes recursos para além dos enunciados nas tarefas propostas.

No âmbito do domínio das Funções Exponenciais e Logarítmicas, a calculadora gráfica assume um papel muito importante. A sua utilização foi necessária na resolução das três tarefas propostas em sala de aula. Efetivamente, trata-se de um instrumento tecnológico importante uma vez que ajuda os alunos na compreensão de certos conteúdos e relações matemáticos e na execução de certos procedimentos (MEC, 2013). Em particular, na resolução das tarefas apresentadas, a calculadora gráfica permitiu a visualização das funções consideradas, o aparecimento de diferentes estratégias de resolução e a verificação de métodos de caráter mais analítico.

Tal como já foi referido, as duas tarefas resolvidas individualmente resultaram da seleção de alguns exercícios do manual adotado pela escola. Tendo sido um recurso adquirido por todos os alunos para o ano letivo e sendo o tipo de trabalho que desenvolvem frequentemente, considerou-se pertinente a sua utilização nas aulas lecionadas para esta unidade didática.

Por fim, todas as salas de aula da escola participante encontram-se equipadas com um quadro interativo (com computador e projetor). Este foi também um recurso importante nas aulas lecionadas, em particular nos momentos de discussão das tarefas com toda a turma. Independentemente de serem utilizados na concretização, permitia a preparação destes momentos de discussão com recurso a aplicações de *software* como o *Geogebra*. Para além disso, e tal como aconteceu na resolução da segunda tarefa, a existência deste recurso permitiu a projeção de um vídeo que demonstrava a utilização de potencialidades da calculadora gráfica que eram necessárias e que os alunos não dominavam. Esta estratégia permitia que eu continuasse a circular na sala a esclarecer as dúvidas que ainda assim surgissem e que os grupos fossem avançando na sua resolução ao seu ritmo.

Avaliação

Em 1995, o NCTM definiu os diferentes propósitos fundamentais que a avaliação deve servir. Entre esses aspetos, é referido que a avaliação deve monitorizar o progresso dos alunos, visando promover a sua aprendizagem, e tomar decisões no processo de ensino, visando, com estas alterações, melhorar o processo de aprendizagem dos alunos.

A proposta pedagógica da intervenção letiva apresenta uma avaliação de caráter essencialmente formativo. Este tipo de avaliação foi feito através da recolha, análise e do fornecimento de feedback escrito às produções escritas dos alunos. Para além disso, a observação direta do desempenho e da capacidade de comunicação dos alunos durante os momentos de trabalho autónomo e de discussão em turma permitiu-me obter informações sobre o trabalho desenvolvido pelos alunos. As notas de campo que tive oportunidade de registar no final das aulas e conversas com o meu professor cooperante ao longo das aulas lecionadas permitiram-me complementar as informações que tinha sobre o desempenho de cada um dos alunos.

Para garantir que o feedback escrito fosse fornecido de forma adequada e desse aos alunos a oportunidade de melhorar o seu trabalho, foi pensada uma articulação entre o feedback escrito e as aulas lecionadas (Tabela 2).

Tabela 2: Articulação do feedback com as aulas lecionadas

22 FEV	**Aula 1**	Realização do Questionário 1 Resolução da Tarefa 1
	Alunos	Resolução do TPC 1
	Professora	Feedback sobre a Tarefa 1
23 FEV	**Aula 2**	Melhoria da Tarefa 1 Discussão da Tarefa 1
	Professora	Feedback sobre a TPC 1
27 FEV	**Aula 3**	Resolução da Tarefa 2
	Alunos	Melhoria do TPC 1
	Professora	Feedback sobre a Tarefa 2
28 FEV	**Aula 4**	Melhoria do Tarefa 2 Discussão da Tarefa 2
	Alunos	Resolução do TPC 2
1 MAR	**Aula 5**	Resolução da Tarefa 3
	Professora	Feedback sobre a Tarefa 3
1 MAR	**Aula 6**	Melhoria da Tarefa 3 Discussão da Tarefa 3
	Professora	Feedback sobre o TPC 2
2 MAR	**Aula 7**	Melhoria do TPC 2 Realização do Questionário 2

Aulas Lecionadas

A planificação inicial desta intervenção letiva contemplava oito aulas lecionadas, que iriam decorrer entre os dias 22 de Fevereiro de 2018 e 2 de Março de 2018. No entanto, na semana anterior ao início da intervenção letiva, o Professor Cooperante e eu fomos informados da realização de uma atividade da escola, a República das Letras, para todos os alunos do 12.º ano. Esta atividade contempla diferentes sessões de reflexão e discussão a partir da leitura de uma obra literária. Ainda que se trate de uma atividade no âmbito da disciplina de Português, esta é realizada fora das aulas contempladas para esta disciplina, estando todos os professores informados acerca da possibilidade de alteração das planificações das suas aulas. As diferentes sessões desta atividade provocaram diferentes alterações na planificação inicial da intervenção letiva, entre as quais a redução do número de aulas lecionadas, ficando contempladas apenas sete aulas. Para além disso, uma das aulas de quarta feira foi realizada na quinta feira, graças à disponibilidade da professora de Português, que cedeu uma das suas aulas.

Propor uma nova calendarização da intervenção letiva não era uma hipótese viável uma vez que os alunos iam ter um momento de avaliação sumativa escrita na semana seguinte, sendo necessário a aula antes para esclarecimento de dúvidas. Adiar este momento de avaliação escrita também não era uma possibilidade real uma vez que todas as turmas realizavam o teste na mesma semana e que este tinha sido marcado de acordo com a planificação anual, que teve em consideração o facto de a última semana do trimestre ser destinada, exclusivamente e para todos os alunos, à realização de projetos no âmbito do projeto educativo, não havendo aulas. Assim, as sete aulas lecionadas realizaram-se distribuídas pelos dias referidos, tal como a Tabela 3 sugere:

Tabela 3: Distribuição das aulas lecionadas

	22 FEV	23 FEV	27 FEV	28 FEV	1 MAR	2 MAR
	Quinta	Sexta	Terça	Quarta	Quinta	Sexta
08h15 - 09h15					**Aula 5**	
09h25 - 10h25		**Aula 2**	**Aula 3**			**Aula 7**
10h50 - 11h50						
12h00 - 13h00	**Aula 1**			**Aula 4**	**Aula 6**	

Os planos das aulas da intervenção letiva (Anexos 5 a 11) foram elaborados tendo em consideração os objetivos de aprendizagem definidos e os propósitos do estudo em desenvolvimento. Dado o tipo de aulas pensadas para estudar esta problemática, o seu planeamento passou, principalmente, pela previsão das diferentes estratégias e das possíveis dificuldades que os alunos podiam apresentar na resolução de cada uma das tarefas e na preparação dos momentos de discussão.

Uma vez que se trata de uma turma de pequena dimensão, o acompanhamento que fiz aos alunos desde o início do ano letivo tem permitido conhecer de forma mais aprofundada as caraterísticas dos seus métodos de trabalho. Este aspeto permitiu que a previsão das estratégias e das dificuldades fosse, efetivamente, uma mais-valia para as intervenções que os alunos me foram solicitando durante os momentos de trabalho autónomo. Naturalmente que existem sempre aspetos que não são possíveis de prever. Ainda assim, o trabalho feito no planeamento das aulas permite uma maior segurança a lidar com aspetos não previstos.

A observação do trabalho realizado pelos alunos em sala de aula e as suas produções escritas foram aspetos muito importantes na preparação dos referidos momentos de discussão, procurando promover o trabalho realizado por cada um dos grupos.

Para desenvolver as descrições das aulas que apresento de seguida recorri aos registos áudio dos grupos, aos registos que, tal como irei explicar posteriormente, fiz no final de cada uma das aulas e às indicações dadas pelas minhas orientadoras e pelo meu professor cooperante.

Para uma melhor compreensão da descrição feita, são apresentados os objetivos de aprendizagem definidos para cada aula.

Aula 1 | 22 de Fevereiro de 2018

Tabela 4: Objetivos de aprendizagem da Aula 1

Aula 1	Resolver problemas que envolvem o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais; Resolver problemas recorrendo à calculadora gráfica.

A primeira aula desta intervenção letiva começou com algum atraso. Esta aula realizou-se numa quinta-feira, sendo que os alunos têm Educação Física no tempo imediatamente antes. Uma vez que dispõem de dez minutos de intervalo, é habitual os alunos chegaram à sala de aula uns minutos atrasados, sendo este tempo compensado no final da aula.

No final da aula anterior a esta, tinha informado os alunos de que ia começar a intervenção letiva, dando a conhecer, de forma geral, a proposta que ia ser desenvolvida. Desta forma, no início desta aula dei a conhecer, de forma mais aprofundada, os primeiros passos da proposta pedagógica. Introduzi o questionário a preencher e a primeira tarefa, bem como o respetivo método de trabalho e a sua articulação com o feedback que ia fornecer. Como se trata de uma turma do 12.º ano de escolaridade, informei os alunos do tempo que dispunham para a realização da tarefa, promovendo a sua autonomia.

De forma geral, os alunos preencheram o questionário sem dificuldades. Relativamente ao momento de trabalho autónomo na resolução da tarefa, considero que existiu uma dificuldade geral e transversal a toda a tarefa. Uma vez que os alunos trabalham frequentemente na resolução de exercícios, tiveram dificuldade em responder a perguntas que não pediam especificamente um resultado final e que, por isso, não estariam necessariamente corretas ou incorretas. Uma vez que esta tarefa pretendia uma exploração do enunciado após a compreensão do contexto real apresentado, os alunos estranharam o facto de as perguntas não exigirem uma resposta direta. Considero que este aspeto foi visível na frequente necessidade que evidenciaram de ter o processo de trabalho confirmado, como que uma certeza de que os resultados estavam corretos. Esta necessidade foi evidenciada através de frequentes solicitações como: “Professora, isto está bem?” ou “Professora, é suposto fazermos isto assim?”.

Na segunda pergunta da tarefa, surgiram algumas dúvidas relativamente à interpretação do que era pedido, no contexto do problema. Era pedido aos alunos que recomendassem um dos medicamentos para uma situação com um indivíduo que tivesse dificuldades em adormecer. A dúvida era relativa ao significado da palavra adormecer. Alguns alunos consideraram que se trata de um indivíduo com dificuldades no momento de adormecer, permanecendo a dormir depois disso. Outros alunos consideraram que se tratava de um indivíduo que, depois de adormecer, apresentava dificuldades em assim permanecer durante a noite. Naturalmente que esta diferença de interpretações tem implicações na perspetiva e na formulação de uma opinião final, uma vez que se confronta os valores da concentração de medicamento nos momentos iniciais com a concentração de medicamento ao longo das horas de sono. Este confronto de interpretações acabou por se revelar um bom contributo para a promoção do trabalho cooperativo e para a discussão em turma, uma vez que se tratavam de duas hipóteses válidas e com significado no contexto do problema.

No final da aula, reservei um momento para voltar a explicar o que se iria passar na aula seguinte e para propor o trabalho que ia ser realizado em casa.

De forma geral, considero que os objetivos de aprendizagem definidos para esta aula (Tabela 4) foram atingidos uma vez que, ainda que tenham tido algumas dificuldades, os alunos acabaram por se envolver na resolução da tarefa, compreendendo o contexto em que estavam a trabalhar e sabendo resolver as questões propostas, fazendo um bom uso da calculadora gráfica.

Aula 2 | 23 de Fevereiro de 2018

Tabela 5: Objetivos de aprendizagem da Aula 2

Aula 2	Resolver problemas que envolvem o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais; Resolver problemas recorrendo à calculadora gráfica.

A segunda aula da intervenção letiva teve início poucos minutos após a hora marcada.

No início da aula, comecei por recolher as produções escritas do trabalho que tinha sido enviado para casa. Importa referir que um dos alunos não entregou o trabalho de casa. Depois, recordei o trabalho realizado na aula anterior e distribui as produções escritas comentadas para que se pudesse dar início ao segundo momento de trabalho autónomo. Pedi aos alunos que lessem os comentários escritos, referindo que poderiam esclarecer quaisquer dúvidas que surgissem na sua compreensão. O tipo de feedback fornecido foi de tipo descritivo. Assim, alguns alunos manifestaram algumas dificuldades quando verificaram que os erros dos seus trabalhos não estavam identificados e que os comentários não forneciam respostas diretas ou estratégias explícitas para continuar a resolução da tarefa. Este aspeto foi particularmente visível no tipo de solicitações que me foram fazendo ao longo deste momento de trabalho, procurando que, oralmente, lhes identificasse os erros do seu trabalho e lhes explicitasse aquilo que deveriam fazer em seguida.

O fim do momento de trabalho autónomo não foi um aspeto muito bem conseguido da minha parte uma vez que, vendo que alguns grupos ainda não tinham terminado completamente a tarefa, acabei por adiar diversas vezes a hora de início do momento de discussão. Este aspeto tira valor e autoridade às minhas indicações, uma vez que acabam por não ser cumpridas.

O momento de discussão foi muito proveitoso para os alunos, verificando-se que os alunos tinham desenvolvido um bom trabalho na resolução da tarefa. Considero que houve uma valorização do trabalho de cada um dos grupos, tendo garantido que todos os grupos participassem na discussão. Deste modo, os alunos puderam tomar consciência de uma maior diversidade de estratégias e formas de raciocínio na abordagem de um mesmo problema. Uma das grandes mais valias desta tarefa foi a valorização do contexto do problema por parte dos alunos. Tratando-se de um contexto real, como a escolha de um medicamento para dormir, os alunos puderam lidar com algo que faz parte do seu quotidiano, compreendendo a importância que a Matemática pode assumir nestes âmbitos através da sua aplicabilidade.

No fim, reconhecendo o bom trabalho dos alunos, reforcei o valor da aplicabilidade da Matemática e a importância de trabalhar em contextos reais cujo significado podemos compreender. Terminei a aula referindo que na aula seguinte seria introduzida uma nova tarefa e relembrando a hora de início da aula, que seria diferente da habitual, uma vez que, antes, os alunos iriam ter uma das sessões da atividade República das Letras.

À semelhança do que aconteceu na aula anterior, considero que os objetivos de aprendizagem (Tabela 5) foram atingidos, tendo sido feito um aprofundamento do trabalho realizado e havido uma tomada de consciência do seu valor, graças ao momento de discussão.

Aula 3 | 27 de Fevereiro de 2018

Tabela 6: Objetivos de aprendizagem da Aula 3

Aula 3	Compreender a relação de proporcionalidade direta entre uma função exponencial e a sua derivada; Resolver problemas que envolvem o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais; Resolver problemas recorrendo à calculadora gráfica, incluindo a potencialidade de regressão.

A terceira aula da intervenção letiva teve início poucos minutos após a hora marcada.

No início da aula, entreguei as produções escritas do trabalho de casa comentadas à minha orientadora, para que poder receber algum feedback sobre o trabalho que me encontrava a desenvolver com os alunos, que foi fundamental no desenvolvimento do estudo e na elaboração deste relatório.

Desta forma, comecei a aula introduzindo a segunda tarefa, recordando que o método de trabalho seria semelhante ao adotado na resolução da primeira tarefa. Uma vez que a resolução desta tarefa iria exigir o recurso a algumas potencialidades da calculadora que os alunos não dominavam, referi que, tal como o meu professor cooperante tem o hábito de fazer, iria ser projetado um vídeo que demonstrava os passos necessários na sua utilização.

Na primeira pergunta, as dificuldades que os alunos demonstravam estavam relacionadas com o facto de a função apresentada ser definida com recurso a constantes reais. Este aspeto acabou por criar algumas dificuldades no passo necessário para a determinação da função derivada devido à confusão que alguns alunos fizeram entre a variável e as constantes. Ainda assim, este momento serviu para verificar que a constituição dos grupos foi, de forma geral, bem conseguida. De facto, a maioria destas dúvidas acabou por ser esclarecida dentro do grupo, ainda que tenham recorrido a algum tipo de orientação da minha parte.

Em comparação com a primeira tarefa, o trabalho pedido na resolução da segunda pergunta era mais orientado, pelo que as dificuldades verificadas estavam muito relacionadas com o uso da calculadora gráfica. Ainda assim, verificou-se que alguns alunos revelaram algumas dificuldades em compreender o que era pedido nas alíneas que exigiam uma compreensão do contexto do problema por se tratar, mais uma vez, de um tipo de trabalho menos direto, que não pretende apenas um resultado final.

No final da aula, procedi à distribuição das produções escritas dos trabalhos de casa, e, ao mesmo tempo, os diferentes grupos foram entregando a produção escrita do trabalho realizado durante a aula. Uma vez que a hora de início da aula do dia seguinte também não era a habitual, relembrei os alunos de que a seguir à sessão da República das Letras se deveriam dirigir diretamente para a sala.

De forma geral, considero que os objetivos de aprendizagem definidos (Tabela 6) foram atingidos. Previa que alguns alunos não compreendessem de imediato a relação de proporcionalidade direta existente entre uma função exponencial e a sua derivada, reconhecendo que o momento de discussão da aula seguinte poderia constituir um importante contributo para que isso acontecesse.

Aula 4 | 28 de Fevereiro de 2018

Tabela 7: Objetivos de aprendizagem da Aula 4

Aula 4	Compreender a relação de proporcionalidade direta entre uma função exponencial e a sua derivada; Conhecer a equação diferencial de primeira ordem e reconhecer a função exponencial como solução; Resolver problemas que envolvem o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais; Resolver problemas recorrendo à calculadora gráfica, incluindo a potencialidade de regressão.

A quarta aula da intervenção letiva começou trinta minutos depois da hora estipulada devido ao atraso que se verificou na sessão da República das Letras. Este atraso acabou por ser compensado no final da aula, graças à disponibilidade dos alunos em permanecerem na sala de aula depois da hora estipulada. Ainda assim, e tal como seria de esperar, os alunos já se encontravam mais dispersos, o que acabou por ter algum impacto no momento de discussão em turma. Prevendo que os alunos pudessem estar menos concentrados, aproveitei o início da aula para os informar sobre o segundo trabalho de casa, que deveriam entregar no dia seguinte e seguindo o mesmo método de trabalho utilizado no primeiro.

O momento de trabalho autónomo correu bem, tendo a maioria dos grupos de trabalho conseguido terminar a tarefa antes do início do momento de discussão. Tal como já foi referido, sendo o trabalho mais orientado, a discussão acabou por ter um maior desenvolvimento nas alíneas em que era pedida uma resposta no contexto do problema. Ainda assim, este momento foi importante para a explicitação da diferença entre os modelos exponencial e logístico. No contexto do problema, os alunos puderam visualizar essa diferença graças às potencialidades da calculadora gráfica. De facto, todos os alunos recorreram à representação gráfica dos modelos obtidos para a fundamentação das suas respostas. Para além disso, a maioria dos grupos conseguiu reconhecer que o modelo logístico era o modelo mais adequado uma vez que a sardinha é um recurso finito e que, por isso, a quantidade de sardinha pescada não podia ser traduzida por uma função que fosse sempre crescendo ao longo do tempo.

Relativamente aos objetivos de aprendizagem (Tabela 7), considero que estes foram atingidos. Para que isso acontecesse, e tal como tinha previsto, o momento de discussão teve um contributo importante na medida em que permitiu sistematizar algumas conclusões relativas à equação diferencial de primeira ordem. De facto, graças a este momento, os alunos puderam concluir que se estabelecia uma relação de proporcionalidade direta entre a função exponencial e a sua derivada e, depois, compreender que a função exponencial se apresentava como solução da equação diferencial de primeira ordem ($y' = ky,\ k \in \mathbb{R}$).

Aula 5 | 1 de Março de 2018

Tabela 8: Objetivos de aprendizagem da Aula 5

Aula 5	Compreender a relação de proporcionalidade direta entre uma função exponencial e a sua derivada; Conhecer a equação diferencial de primeira ordem e reconhecer a função exponencial como solução; Resolver problemas que envolvem o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais; Resolver problemas recorrendo à calculadora gráfica.

A quinta aula da intervenção letiva foi realizada no primeiro tempo de quinta feira, em vez da aula de Oficina de Português, graças à disponibilidade da professora de Português da turma. Tendo sido o primeiro tempo da manhã, a aula teve início poucos minutos após a hora marcada.

No início da aula, comecei por recolher as produções escritas do segundo trabalho de casa, que todos os alunos entregaram. Em seguida, introduzi a terceira tarefa. Reconhecendo o nível de dificuldade da primeira pergunta, comecei por recordar as conclusões obtidas no final do momento de discussão da aula anterior, referindo que o trabalho a desenvolver viria no seguimento desses aspetos.

Tal como tinha previsto, os alunos apresentaram algumas dificuldades em responder à primeira pergunta. Este aspeto foi visível no número de vezes que os grupos me solicitavam. Ainda assim, recordar as conclusões da aula anterior relativas à equação diferencial de primeira ordem teve um contributo importante e permitiu que a maioria dos grupos percebesse que a expressão da temperatura pedida era dada por uma função exponencial. A partir daí, as dificuldades que os alunos demonstraram eram relativas ao recurso das diferentes constantes apresentadas no enunciado e à modelação da função em causa. Importa referir que a dedução de uma expressão semelhante é apresentada no manual, na mesma unidade de onde foram selecionados os exercícios que foram enviados para trabalho de casa. Durante o trabalho realizado em casa, alguns alunos referiram que tinham visto essa dedução, não sendo possível concluir se este aspeto enviesou o seu trabalho ou se contribuiu apenas como uma pista no processo de trabalho.

Uma vez que se verificaram mais dificuldades na resolução da tarefa, os alunos não terminaram a resolução da tarefa e demoraram mais tempo a terminar o momento de trabalho autónomo e a entregar as suas produções escritas. Isto aconteceu devido à vontade de confrontar o trabalho desenvolvido com o dos colegas. Como a aula seguinte, com o segundo momento de trabalho e o momento de discussão, se realizava nesse mesmo dia, este foi um aspeto que manteve os alunos motivados para esse tempo.

Dadas as dificuldades apresentadas no momento de trabalho, considero que os objetivos de aprendizagem (Tabela 8) foram parcialmente definidos, o que evidencia a importância do contributo do segundo momento de trabalho e do momento de discussão. De forma geral, recordando a aula anterior, os alunos compreenderam que a expressão da temperatura seria dada por uma função exponencial. No entanto, como a dedução da expressão exigia alguns passos menos intuitivos, alguns grupos acabaram por não conseguir desenvolver muito a expressão pedida, não tendo chegado a responder à segunda pergunta.

Aula 6 | 1 de Março de 2018

Tabela 9: Objetivos de aprendizagem da Aula 6

Aula 6	Compreender a relação de proporcionalidade direta entre uma função exponencial e a sua derivada; Conhecer a equação diferencial de primeira ordem e reconhecer a função exponencial como solução; Resolver problemas que envolvem o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais; Resolver problemas recorrendo à calculadora gráfica.

A sexta aula desta intervenção letiva começou com algum atraso. Sendo quinta feira, e tal como já foi referido, a aula de Educação Física no tempo imediatamente antes costuma provocar alguma demora na chegada dos alunos à sala de aula.

No início da aula procedi à distribuição das produções escritas já comentadas. Uma vez que os alunos tinham ainda bastante presente o trabalho desenvolvido na aula anterior, no primeiro tempo dessa manhã, o momento de trabalho autónomo foi iniciado de forma ágil.

Verificou-se uma diferença na forma como os alunos trabalharam durante este segundo momento de trabalho, tendo estado mais concentrados e envolvidos no trabalho em grupo. É necessário considerar que, para além dos comentários escritos, esta diferença pode ser justificada pelas discussões tidas entre colegas ou pela aquisição de uma nova perspetiva sobre o problema, própria de quem não olha o enunciado pela primeira vez. Assim, o segundo momento de trabalho autónomo correu bem, sendo que todos os grupos conseguiram aproximar-se da expressão desejada, ainda que nem todos a tenham conseguido apresentar de acordo com as indicações dadas no enunciado.

A grande maioria dos alunos não apresentou dificuldades na resolução da segunda pergunta da tarefa, tendo, para isso, tirado proveito do trabalho desenvolvido na resolução da pergunta anterior. De facto, as diferentes estratégias que surgiram na resolução da segunda pergunta permitem verificar que, ainda que tenham precisado de mais orientações, os alunos compreenderam o significado da expressão, sabendo utilizar aspetos da sua dedução para obtenção de certos resultados.

Dado o investimento dos alunos na resolução da primeira pergunta, foi visível o gosto com que partilharam o seu processo de trabalho durante o momento de discussão. Sendo a segunda pergunta de caráter mais direto, a sua discussão foi feita de forma mais rápida. Ainda assim, foi possível verificar nos alunos uma maior consciência sobre diferentes estratégias para a sua resolução, tendo havido alguns grupos que ainda que tenham resolvido de uma forma, tinham considerado outra hipótese e partilhado isso na discussão.

No final desta aula, considero que, de uma forma geral, os objetivos de aprendizagem (Tabela 9) foram atingidos. O momento de discussão em turma permitiu consolidar as aprendizagens realizadas na aula anterior. De facto, durante este momento, recordando a relação de proporcionalidade direta entre a função exponencial e a sua derivada, os alunos tiveram oportunidade de reconhecer a função exponencial como solução da equação diferencial de primeira ordem. Esta conclusão foi obtida a partir de intervenções de alguns alunos, mas houve oportunidade de esclarecer as dúvidas que surgiram dos restantes, garantindo que ficava sistematizada de forma clara.

Aula 7 | 2 de Março de 2018

Tabela 10: Objetivos de aprendizagem da Aula 7

Aula 7	Resolver problemas relacionados com o estudo de modelos exponenciais; Desenvolver a capacidade de reflexão sobre o trabalho realizado, em grupo e a nível individual.

A sétima e última aula da intervenção letiva teve início poucos minutos após a hora marcada.

Tendo em conta que o tipo de trabalho proposto seria bastante diferente, comecei a aula por explicar aquilo que ia acontecer durante a aula, com o momento de trabalho individual para a melhoria do trabalho de casa e o preenchimento do segundo questionário. Em seguida procedi à distribuição das produções escritas do segundo trabalho de casa devidamente comentadas.

O momento de trabalho individual correu bem, tendo a maioria dos alunos entregue a versão melhorada do seu trabalho antes do tempo estipulado terminar. Uma vez que iam ter um momento de avaliação por domínios na semana seguinte, aproveitaram o tempo restante para esclarecer algumas dúvidas que tinham, resultantes do estudo que tinham desenvolvido até à data. Durante este momento, contei com o apoio do meu professor cooperante.

Por fim, e à medida que ia recolhendo as últimas produções escritas melhoradas do segundo trabalho de casa, entreguei o questionário, tendo reforçado a importância de que, tal como no primeiro, fossem sinceros nas respostas que apresentassem. Os alunos mostraram-se muito disponíveis para esta proposta, tendo sido bastante exaustivos nas respostas que deram.

Antes de terminar a aula, concluí a intervenção letiva, agradecendo a disponibilidade dos alunos ao longo das aulas e relativamente às alterações que foram sendo feitas e que tiveram impacto no seu horário.

CAPÍTULO 4.
METODOLOGIA

Neste capítulo, começo por explicitar as principais opções metodológicas tomadas para o desenvolvimento da componente de cariz investigativo deste trabalho. Em seguida, faço referência aos participantes deste estudo e aos métodos de recolha e análise de dados utilizados durante o estudo. Por fim, apresento algumas considerações de natureza éticas relevantes.

Opções Metodológicas

O objetivo deste trabalho passa por compreender o contributo do feedback nas aprendizagens dos alunos. Pretendeu-se observar, analisar e interpretar os processos desenvolvidos pelos alunos em relação ao feedback fornecido na resolução de diferentes tarefas. Neste sentido, seguiu-se um paradigma interpretativo.

Uma investigação de natureza interpretativa valoriza os comportamentos e atitudes observados, permitindo a recolha de informação importante sobre os processos de ensino e aprendizagem (Lessard-Hébert, Goyette, & Boutin, 1994). Não se pretende generalizar as conclusões obtidas, mas antes interpretar a informação que é recolhida a partir de uma investigação em pequena escala. De facto, este estudo foi desenvolvido num ambiente particular, numa turma pequena, com um bom ambiente de trabalho em sala de aula e um bom nível de desempenho a Matemática, de forma a perceber o contributo do feedback escrito na aprendizagem de cada um dos treze alunos participantes.

Também segundo Bogdan e Biklen (1994), uma abordagem deste tipo pode ser caraterizada por cinco aspetos, ainda que, também de acordo com os autores, nem todos os estudos considerados qualitativos apresentem de forma evidente cada um destes. Em primeiro lugar, numa investigação qualitativa, a recolha de dados é feita, principalmente, a partir do ambiente natural e através do investigador, privilegiando o contacto direto. De facto, ainda que se utilize equipamento de registo áudio ou vídeo, esses dados são revistos pelo investigador e complementados pela informação por ele obtida. Em segundo lugar, o tipo de dados recolhidos é de natureza descritiva. Isto significa que não se tratam de números uma vez que os investigadores não procuram reduzir o seu trabalho a símbolos numéricos, tentando antes “analisar os dados em toda a sua riqueza” (Bogdan & Biklen, 1994, p. 48). Em terceiro lugar, o interesse do investigador está no processo e não apenas nos seus resultados e produtos. De facto, este estudo procura compreender de que forma o feedback contribui para a aprendizagem dos alunos e não apenas se este tem um contributo ou não. Em quarto lugar, o processo de análise dos dados é feito de forma indutiva por parte do investigador. Isto significa que a análise feita não procura confirmar ou refutar hipóteses previamente construídas. De facto, "o processo de análise de dados pode ser comparado a um funil: as coisas estão abertas no início e vão-se tornando mais fechadas e específicas" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 50) à medida que o trabalho é desenvolvido. Por fim, reconhece grande importância no significado que os participantes atribuem à sua experiência, isto é, à sua perspetiva (Bogdan & Biklen, 1994).

Uma vez que o estudo se foca no contributo do feedback, conhecendo o processo de trabalho de cada aluno participante e interpretando os dados que a partir daí são recolhidos, importa, também, referir que este estudo é desenvolvido numa lógica de descoberta, procurando responder às questões formuladas.

Participantes

Turma

Tal como referi acima, uma vez que esta investigação adota uma abordagem qualitativa, os dados são recolhidos a partir do ambiente natural e restrito. Para além disso, e uma vez que não se pretende generalizar as conclusões obtidas, não se pretende que o conjunto de participantes do estudo seja representativo.

Durante este ano letivo, o professor cooperante que acompanhei, Dr. Nuno Santos, tinha a seu cargo quatro turmas, lecionando Matemática A a três turmas de 12.º ano e a uma de 10.º ano. Como, no primeiro semestre, frequentei aulas no Instituto da Educação, apenas me era possível acompanhar todas as aulas de Matemática A de uma das turmas, tendo sido, portanto, o critério de seleção da turma o de conveniência.

Assim, neste estudo, os participantes são os alunos desta turma. Uma vez que se trata de uma turma de pequena dimensão, e tendo em conta as caraterísticas deste estudo, todos os treze alunos desta turma são participantes.

Grupos de Trabalho

Tal como já foi referido, não existem alunos com necessidades educativas especiais nesta turma, pelo que todos os alunos desenvolvem o mesmo tipo de atividades propostas pelo professor.

Assim, para as propostas de trabalho em grupo, foram constituídos seis grupos de trabalho, formando cinco pares e um trio. A constituição dos grupos foi feita sob a orientação do professor cooperante, que acompanhou a turma ao longo de todo o Ensino Secundário, possuindo um conhecimento aprofundado da turma e de cada um dos seus alunos.

A representatividade de género não foi um dos critérios utilizados, uma vez que, tal como já foi referido, a turma não apresenta um equilíbrio a esse nível. Assim, e a partir do conhecimento da personalidade e do tipo de trabalho de cada um dos alunos, procurou-se formar grupos de trabalho que fomentassem o trabalho colaborativo e que contribuíssem para a comunicação dentro do grupo.

No trabalho desenvolvido em sala de aula, os alunos encontravam-se distribuídos como a Figura 6 sugere:

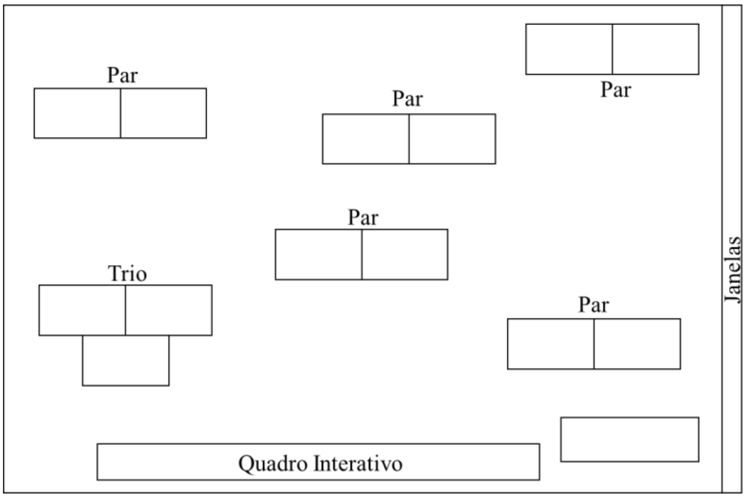


Figura 6: Distribuição dos grupos de trabalho na sala de aula

O Professor Cooperante, enquanto professor titular da turma, participou igualmente neste estudo, fornecendo-me informação relevante, quer sobre os alunos, quer sobre o modo como as aulas se desenvolveram, quer proporcionando-me momentos importantes de reflexão sobre o meu trabalho.

Recolha de Dados

No desenvolvimento deste trabalho, tomei a posição de observadora participante, que, de acordo com Bogdan e Biklen (1994), pode ser considerada uma das "estratégias representativas da investigação qualitativa" (p.16).

Para a recolha de dados neste estudo utilizei a observação direta, com registo áudio, a recolha documental e a realização de questionários (no início e no final da intervenção letiva).

Observação Direta

A observação direta dos participantes é um meio muito importante na recolha de dados durante a realização de um estudo uma vez que permite complementar os dados que são obtidos através de outros instrumentos.

Uma vez que me encontro a realizar a intervenção letiva sem a presença de outro colega, não tive a possibilidade de obter as notas de campo de alguém que estivesse a assistir à aula. No final de cada uma das aulas lecionadas, registava algumas anotações com informações que considerava relevantes sobre o trabalho dos alunos. Ainda que estes registos não fossem muito detalhados, considero que foram importantes para a elaboração deste relatório uma vez que permitiram complementar as informações recolhidas através dos outros instrumentos utilizados. Durante a realização da intervenção letiva, estes registos foram importantes na formulação do feedback escrito a dar aos alunos, na medida em que permitia ter mais dados sobre a forma como os alunos trabalharam durante as aulas.

Para além disso, nas aulas que incluíram momentos de trabalho em grupo, optei por fazer o registo áudio do trabalho de alguns dos grupos. Para este efeito, selecionei dois dos seis grupos formados. O primeiro par selecionado (Sara-Sofia) é constituído por duas alunas que apresentam uma excelente capacidade de trabalho cooperativo e uma grande facilidade de comunicação neste tipo de momentos. Estas alunas apresentaram, no final do primeiro trimestre, as classificações de 19 e 15 valores, respetivamente. O segundo par selecionado (Bernardo-Bento) é constituído por dois alunos que também apresentam uma boa capacidade de trabalho cooperativo, ainda que com alguns momentos de dispersão, uma grande facilidade de comunicação e uma notória e distintiva capacidade de raciocínio intuitivo. Estes alunos apresentaram, no final do primeiro trimestre, as classificações de 17 e 18 valores, respetivamente.

Ainda que este trabalho tratasse, em particular, do contributo do feedback escrito, uma das minhas orientadoras cooperantes alertou-me para o facto de este ser complementado com feedback oral no decorrer das aulas. Assim, e depois da sua sugestão, a partir da Aula 3, optei por fazer o registo áudio das minhas intervenções junto dos alunos. Este registo revelou-se extremamente útil uma vez que, para além do feedback oral, permitiu-me ter o registo das dúvidas que os alunos apresentavam na leitura do feedback escrito, aos comentários que faziam acerca da sua compreensão e fazer um registo mais fiel do desenvolvimento dos diferentes momentos da aula e da sua duração, que também contribuiu para a realização das reflexões sobre as aulas.

Recolha Documental

No desenvolvimento deste trabalho, e dada a problemática em que este se enquadra, a recolha documental foi um instrumento de recolha de dados muito importante. Neste sentido, os documentos recolhidos foram as produções escritas das tarefas individuais e em grupo realizadas pelos alunos, contemplando a versão antes do feedback dado e a versão depois do feedback dado, e os comentários escritos por mim.

A produção escrita da primeira versão permite ter acesso à primeira abordagem do aluno, ou do grupo, à tarefa e a produção escrita da segunda versão permite ter acesso à forma como o aluno, ou o grupo, melhorou o seu trabalho, depois de ter recebido o feedback, podendo fornecer informações sobre o contributo que este pode ter tido no seu processo de trabalho. Os comentários escritos permitem ter acesso à informação que o aluno recebeu para, depois, ter a oportunidade de melhorar o seu trabalho.

Relativamente aos comentários escritos, importa referir que, na primeira tarefa, foram todos apresentados no final da produção escrita e, nas restantes tarefas, foram sendo apresentados ao lado das perguntas em causa. Este aspeto deveu-se unicamente à falta de espaço verificada nas primeiras produções escritas dos alunos para esse efeito.

As tarefas foram sempre entregues em suporte papel, tendo sido pedido aos alunos que entregassem a respetiva produção escrita numa folha à parte, que foi também fornecida por mim. Na realização das tarefas individuais, cada um dos alunos entregou uma produção escrita. No entanto, nas tarefas realizadas em grupo, foi pedido aos alunos que entregassem apenas uma produção escrita por grupo, pretendendo, assim, promover o trabalho cooperativo. Da mesma forma, o feedback escrito dado a este tipo de tarefas foi, também, dado ao grupo e não a nível individual.

Complementarmente, documentos da escola, nomeadamente o seu projeto educativo, serviram igualmente para descrever a escola.

Inquéritos

Durante a realização deste estudo foram ainda aplicados dois questionários, de modo a recolher as opiniões sobre o feedback. No início da intervenção letiva, foi realizado o primeiro questionário (Anexo 12), que pretendia tomar conhecimento da experiência que os alunos tinham com a prática do feedback escrito e que significado lhe atribuíam. Em particular, tinha por objetivo compreender o que os alunos entendiam por feedback escrito e o tipo de trabalho que costumavam desenvolver quando recebem este tipo de comentários.

No final da intervenção letiva, foi realizado o segundo questionário (Anexo 13), que pretendia conhecer a perspetiva que os alunos, enquanto participantes, tinham tido da intervenção letiva e a sua experiência com esta prática de ensino. Este questionário pretendia conhecer a importância e utilidade que os alunos atribuíram ao feedback dado durante a intervenção letiva e os aspetos que, nestes comentários, consideravam mais relevantes para a sua aprendizagem.

É ainda de fazer notar que, para a caracterização da turma, conversas de natureza mais informal com o meu Professor Cooperante forneceram informação igualmente relevante.

Análise de Dados

A análise de dados pretende organizar, compreender e interpretar todos os dados recolhidos durante a investigação, visando apresentar respostas às questões formuladas inicialmente (Bogdan & Biklen, 1994). Tal como estes autores referem, a análise de dados contempla um processo de trabalho com os dados que visa a sua organização e síntese, a procura de padrões e dos aspetos importantes, de forma a decidir aquilo que deve ser transmitido a outros.

Neste processo, foram definidas categorias de análise de acordo com as questões de investigação, respeitando a sua ordem. Desta forma, considerei três categorias: (i) importância atribuída ao feedback escrito; (ii) eficácia do feedback escrito; e (iii) caraterísticas potenciadoras da aprendizagem. Em todas elas os dados seguiram a análise de conteúdo, quer dando-lhes um tratamento quantitativo (no caso da categoria 2); quer um tratamento qualitativo.

Na primeira categoria, a partir das respostas dos alunos aos dois questionários propostos, procurei focar-me em dois aspetos principais. Por um lado, analisei a experiência que os alunos tiveram com o feedback escrito ao longo do seu percurso, o que permitiu conhecer aquilo que eles entendem por feedback escrito, as disciplinas em que esta prática de ensino foi desenvolvida e o procedimento que foi utilizado nessas situações. Por outro lado, procurei perceber a utilidade que os alunos reconhecem ao feedback escrito antes do início da intervenção letiva.

Na segunda categoria, a partir das produções escritas dos alunos, procurei conhecer a eficácia do feedback escrito no trabalho desenvolvido pelos alunos. Para este efeito, considerei as produções escritas de todas as tarefas propostas, a nível individual e em grupo. Esta análise pretendeu estudar se os alunos melhoraram ou não as suas produções escritas depois de terem recebido feedback escrito, estudando as versões antes e depois de os alunos terem recebido feedback escrito e os comentários escritos que foram fornecidos em cada tarefa. Uma vez que se verificaram diferentes situações em que foi fornecido feedback escrito, optei por criar uma tipologia que permitisse organizar as produções escritas. Esta tipologia contempla as cinco situações descritas no Quadro 3:

Quadro 3: Tipologia para a análise da eficácia do feedback escrito

Tipo	**Descrição**
A	**Incompletude**: situação que se verifica quando os alunos não apresentam uma resposta a todos os elementos que estão solicitados no enunciado.
B	**Contexto do Problema**: situação que se verifica quando os alunos não compreendem ou não contemplam o contexto do problema nas suas respostas, que é um aspeto relevante dadas as caraterísticas das tarefas construídas.
C	**Fundamentação**: situação que se verifica quando os alunos não apresentam a devida fundamentação nas suas respostas.

D	**Correção**: situação que se verifica quando os alunos apresentam erros formais ou nos processos de cálculo ao longo do desenvolvimento das suas respostas.
E	**Enriquecimento**: situação que se verifica quando é pertinente sugerir a continuação ou enriquecimento de uma resposta a partir do trabalho já desenvolvido pelos alunos.

Cada uma das tarefas foi analisada de forma separada e, ainda que tenha contemplado todas as produções escritas dos alunos, apenas apresento um exemplo de forma a ilustrar a eficácia do feedback escrito nessa situação em particular. Importa notar que não se verificou a existência de situações de todas as categorias definidas em todas as tarefas propostas.

Na terceira categoria, e a partir da experiência dos alunos durante a intervenção letiva, procurei identificar as caraterísticas que, segundo o trabalho desenvolvido pelos alunos, se revelaram potenciadoras da sua aprendizagem. Para isso, comecei por analisar as respostas dos alunos ao segundo questionário, verificando os aspetos que os alunos referiram terem sido mais úteis nos comentários escritos que receberam ao longo de toda a intervenção letiva. De seguida, analisei as produções escritas dos alunos e o registo áudio dos grupos de trabalho para conhecer a forma como os alunos trabalharam a partir do feedback escrito fornecido, procurando encontrar aspetos relevantes para esta categoria.

Questões de Natureza Ética

De acordo com as orientações da Carta Ética para a Investigação em Educação e Formação (CEIEF), importa referir que foram tidas em consideração as questões éticas necessárias.

Os participantes foram devidamente informados sobre o estudo, tendo tido conhecimento do âmbito em que este ia ser desenvolvido, dos seus propósitos, dos dados a recolher e das caraterísticas da sua participação. Antes do início do estudo, em aula, houve oportunidade para esclarecer as dúvidas que os alunos tiveram sobre estas informações.

No início do ano letivo, no âmbito das intervenções letivas que realizei durante o primeiro semestre, fui informada pelo diretor do Ensino Secundário e pelo Professor Cooperante que, uma vez que se trata de uma escola em que é comum haver aulas observadas e com registo áudio e vídeo, os encarregados de educação dão este tipo de consentimento no formulário da matrícula do aluno, entregue no ato de inscrição. Desta forma, e depois de ter solicitado esta informação junto do diretor do Ensino Secundário, tomei conhecimento de que apenas um aluno não tinha este tipo de autorização por parte do seu encarregado de educação. Assim, este aluno ficou imediatamente excluído da seleção de grupos para o registo áudio nos momentos de trabalho cooperativo, que foi feita posteriormente.

Relativamente à confidencialidade e privacidade, assegurei que toda a informação que recolhi foi armazenada de forma segura, tendo sido utilizada apenas para os fins deste relatório. Para além disso, os nomes dos alunos participantes não são apresentados ao longo deste relatório, nem noutros documentos que possam ser produzidos a partir deste.

CAPÍTULO 5.
ANÁLISE DE DADOS

A análise dos dados recolhidos durante este estudo foi feita tendo em consideração as questões de investigação. Assim, para estudar a importância que os alunos atribuem ao feedback escrito, analisaram-se as respostas ao primeiro questionário. Para conhecer a eficácia do feedback escrito nas produções escritas dos alunos, analisaram-se as diferentes versões das produções escritas dos alunos. E, para identificar as caraterísticas que se revelam mais potenciadoras da aprendizagem dos alunos, conciliaram-se os dados obtidos a partir das produções escritas e as respostas dadas ao segundo questionário. Este processo também contemplou as notas de campo e o registo áudio.

Importância do feedback escrito

Experiência com o feedback escrito

A partir da análise das respostas ao primeiro questionário (Anexo 12), podemos concluir que todos os alunos conhecem a prática de ensino do feedback escrito e que conseguem identificar momentos do percurso escolar em que os seus professores forneceram feedback escrito. Os treze alunos responderam a este questionário.

De forma geral, os alunos identificaram mais do que um contexto onde receberam feedback escrito, sendo que se verificam que três deles são referidos mais frequentemente nas respostas ao questionário: os testes escritos, as informações para os encarregados de educação e os trabalhos individuais (Quadro 4).

Quadro 4: Contextos de feedback escrito mais frequentes

Contextos	Frequência Absoluta	Frequência Relativa
Testes	10	77%
Informações EE	9	69%
Trabalhos individuais	5	38%
Outros	4	31%

Em primeiro lugar, dez alunos (77%) identificam que muitos professores desenvolvem esta prática de ensino através de comentários escritos aos testes escritos, a que têm acesso quando são entregues. Um dos alunos refere, ainda, que esta é uma prática comum a muitos professores: “Em quase todos os testes de quase todas as disciplinas, os professores escrevem comentários para que saibamos exatamente o que fizemos de errado” (Alberto).

Em segundo lugar, nove alunos (69%) fazem referências às sínteses individuais de cada disciplina, que são enviadas para casa a meio e no final de cada trimestre, juntamente com as avaliações intercalares ou com as classificações finais de trimestre: “No final de cada período, vai uma síntese para casa a avaliar o nosso desempenho e a dizer os pontos a melhorar no período seguinte” (Alberto).

Em terceiro lugar, cinco alunos (38%) referem que já receberam feedback escrito relativamente a alguns trabalhos individuais, a que tiveram acesso depois de os professores os entregarem. Este aspeto é visível numa resposta de um dos alunos, que diz: “Também recebemos feedback escrito em trabalhos individuais que entregamos e depois recebemos” (Sara).

Ainda que o questionário tratasse de feedback escrito, importa referir que alguns alunos mencionam o feedback oral. Três alunos (23%) apontam que recebem feedback oral relativamente ao desempenho que têm nas apresentações orais que realizam: “Após apresentações, é costume os professores comentarem e dizerem o que está bom e o que tem de ser melhorado” (Sofia). Um aluno (8%) indica, ainda, que o feedback oral pode complementar os comentários escritos dados pelo professor. Este aspeto é visível numa das suas respostas: “Às vezes, falo com o professor para compreender melhor os comentários que escreveu (Marta)”.

Relativamente às disciplinas que os alunos foram frequentando ao longo do seu percurso escolar, 11 alunos (85%) referem explicitamente aquelas em que esta prática de ensino foi desenvolvida (Quadro 5).

Quadro 5: Disciplinas em que os alunos receberam feedback escrito

Disciplinas	Frequência Absoluta	Frequência Relativa
Português	9	69%
Matemática	6	46%
Filosofia	4	31%
Inglês	3	23%
Geografia	3	23%
Geometria Descritiva	2	15%
História	2	15%
Física e Química	1	8%

A partir do Quadro 5, verifica-se que o Português e a Matemática são as disciplinas nas quais os alunos referem mais frequentemente ter recebido feedback escrito. Importa notar que existem disciplinas que os alunos já tiveram no seu percurso escolar e que não são referidas, como Ciências Naturais ou Educação Visual.

Para além disto, verifica-se que dois alunos acrescentam comentários sobre as disciplinas em que esta prática é desenvolvida de forma mais frequente. O primeiro refere que "As disciplinas que dão mais feedback são as de Português, Matemática, Inglês e Geografia" (Sofia). O segundo defende que "Isto [receber feedback] acontece mais nas disciplinas ligadas às línguas e humanidades, como Português, Filosofia e História" (Bento). Observa-se, ainda, um aluno, que não explicitando qualquer disciplina, refere: "No meu percurso escolar, todos os meus professores já me deram feedback" (Manuel).

Na análise das respostas, é possível conhecer o procedimento de trabalho utilizado nas situações em que foi fornecido feedback escrito. De forma geral, verifica-se que os alunos não tiveram muitas oportunidades para, depois de receber feedback escrito, melhorar o trabalho que desenvolveram e voltar a entregar ao professor. Dez alunos (77%) referem que não tiveram essa oportunidade e três alunos (23%) referem que já a tiveram no seu percurso escolar.

Dos alunos que já tiveram oportunidade de entregar ao professor o trabalho melhorado, dois apontam que viveram essa experiência na disciplina de Português:

> Na disciplina de Português, já fizemos trabalhos (poucos) em que realizávamos questionários que depois eram corrigidos e devolvidos para termos a oportunidade de melhorar algumas questões (Alberto).

Ainda assim, o outro aluno, depois de expor a mesma situação, referindo-se à oportunidade de entregar de novo o seu trabalho, afirma não aproveitar essa oportunidade: "[Em Português] Já existiu essa possibilidade, mas eu não costumo entregar de novo" (Sofia).

Estes dados permitem concluir que, apesar de os alunos terem tido contacto com esta prática de ensino ao longo do seu percurso escolar, a possibilidade de melhorar o trabalho e voltar a entregar é uma estratégia diferente das que já experimentaram. Apesar disto e ainda antes de a experimentarem na intervenção letiva, alguns alunos reconhecem o possível contributo de uma estratégia como esta:

A oportunidade de melhorar o trabalho parece-me ser a melhor forma de proceder visto que o trabalho revisto corresponderá à aprendizagem do aluno, incluindo as alterações que podem derivar do feedback recebido (Bento).

Utilidade do feedback escrito

Também a partir da análise das respostas ao primeiro questionário, podemos conhecer a utilidade que os alunos reconhecem a esta prática de ensino depois da experiência que tiveram no seu percurso escolar.

Relativamente à utilidade que esta prática de ensino assume na sua aprendizagem, a grande maioria dos alunos afirma que o feedback escrito é útil (85%) e dois alunos (15%) referem que isso não acontece.

Todos os alunos da turma justificam a posição que tomam. Os alunos que defendem que o feedback escrito é útil para o trabalho que desenvolvem, apresentam diferentes razões pelas quais isso acontece (Quadro 6).

Quadro 6: Motivos da utilidade do feedback escrito

Motivo	Frequência Absoluta	Frequência Relativa
Orientação para o trabalho	8	62%
Identificação dos erros	5	38%
Outros	2	15%

Oito alunos (62%) defendem que o feedback escrito é útil porque este indica as áreas de cada disciplina em que podem melhorar o trabalho que estão a desenvolver. Este aspeto é visível na resposta dada por um dos alunos:

> Na minha opinião, receber feedback dos professores é essencial para que eu saiba identificar as matérias e capacidades de cada disciplina em que devo trabalhar. Serve para um desenvolvimento mais rápido e completo pois evito focar-me apenas no que me convém e sou alertado para aquilo que me pode fazer evoluir mais (Bento).

De facto, um destes alunos refere que este é o aspeto que torna o feedback escrito sempre útil: "[O feedback] Ajuda-me sempre porque me dá orientações para desenvolver o meu trabalho, percebo por onde tenho de seguir" (César).

Cinco alunos (38%) argumentam que a utilidade desta prática de ensino se deve ao facto de esta permitir identificar os erros cometidos e as razões pelas quais estes foram cometidos, contribuindo para que isso não volte a acontecer. Esta posição é visível na resposta de um dos alunos: "Esta prática é bastante útil pois permite-me perceber onde errei e o porquê do erro que fiz, permitindo-me não voltar a cometê-lo" (Vasco).

Um aluno (8%) justifica a sua posição referindo que o feedback escrito lhe dá a conhecer a perceção que o professor tem do trabalho que desenvolveu: "[O feedback] É sempre importante porque me ajuda a perceber a forma como o professor vê o meu trabalho" (Manuel).

Verifica-se, ainda, que um aluno (8%) aponta o facto de ser escrito como a grande vantagem deste tipo de prática, uma vez que lhe permite rever sempre as indicações dadas pelo professor: "Ajuda, até porque se não fossem escritos acabávamos por nos esquecer e não tínhamos oportunidade de melhorar" (Marta).

Importa referir que, ainda que reconheçam a sua utilidade, dois alunos (15%) referem que nem sempre leem os comentários escritos fornecidos, assumindo que isso os impede de melhorar o trabalho:

> Na minha opinião, esta é uma prática que nos ajuda. Contudo, nem sempre olhamos outra vez para os trabalhos e relemos os comentários e, por isso, não aprendemos e voltamos a cometer os mesmos erros (Bernardo).

Os dois alunos que não consideram o feedback escrito útil também apresentaram uma justificação. Um deles refere que os comentários escritos nem sempre são úteis porque não dão informação relevante para o trabalho desenvolvido pelos alunos e, consequentemente, para a sua aprendizagem: "Uma parte dos comentários que recebi não ajudavam pois só diziam "Bom trabalho" ou "Continua assim!". Mas assim como?" (Mariana). Importa notar que este aluno refere que costuma ler os comentários escritos que lhe são fornecidos, mas que nem sempre utiliza essa informação, como afirmou: "Normalmente, eu leio [os comentários escritos], mas nem sempre faço alguma coisa para melhorar. Fico só com uma noção e penso que da próxima vez correrá melhor" (Mariana).

O outro aluno argumenta que, ainda que os comentários escritos o possam ajudar a melhorar o trabalho que desenvolveu, isso não significa que o ajude a aprender:

> Acho que [o feedback escrito] me ajuda a perceber melhor que aspetos tenho de melhorar, mas não acho que me ajude a aprender pois prefiro que o professor fale comigo sobre esses aspetos. Muitas vezes, nem chego a perceber o que é escrito e isso não me deixa muito motivado para corrigir os erros que cometi (Carlos).

Eficácia do feedback escrito

Para estudar a eficácia do feedback escrito no trabalho dos alunos, optei por realizar uma análise que considerasse cada uma das tarefas de forma separada. Tive em consideração o trabalho apresentado pelos alunos na primeira versão, o feedback dado e a evolução verificada na segunda versão. Apresento inicialmente um quadro geral dos comentários escritos fornecidos, realizando, em seguida, uma análise mais detalhada de uma situação de cada tipo de produção escrita (A, B, C, D e E).

Tarefa 1

O Quadro 7 apresenta um resumo geral do número de comentários fornecidos a cada tipo de produção escrita e o número de casos em se observou ou não melhoria no trabalho dos alunos.

Quadro 7: Comentários escritos fornecidos na Tarefa 1

Tipo	Comentários	Verificaram-se melhorias?	
		Sim	Não
A	3	3	0
B	3	2	1
C	4	3	1
D	3	2	1
E	6	3	3

Da leitura do Quadro 7, verifica-se que foram fornecidos mais comentários (6) do tipo E, de *aprofundamento*, o que é um indicador da qualidade das respostas dadas logo na 1ª versão. Metade desses pares de alunos melhorou o seu trabalho. *Fundamentar, de forma adequada*, é a situação que ficou em segundo lugar no número de feedbacks dados. Importa ainda notar que, em todos os tipos à exceção do E, o número de trabalhos que foram melhorados na segunda versão é superior àqueles que não apresentaram uma evolução positiva. Em particular, foram fornecidos 3 comentários do tipo A, e em todas estas situações verificou-se um progresso do trabalho realizado. *Completar o que falta* parece ser para estes alunos uma tarefa fazível, quando recebem feedback.

<u>Tipo A</u> (Incompletude)

A primeira pergunta contemplava dois aspetos. Por um lado, pedia que os alunos identificassem o medicamento que não cumpria as condições referidas no enunciado. Por outro lado, pedia que explicassem o efeito que se verificaria caso o medicamento identificado fosse tomado por engano.

O par Carlos-César respondeu à primeira parte da pergunta, mas não apresentou uma resposta explícita à segunda (Figura 7).

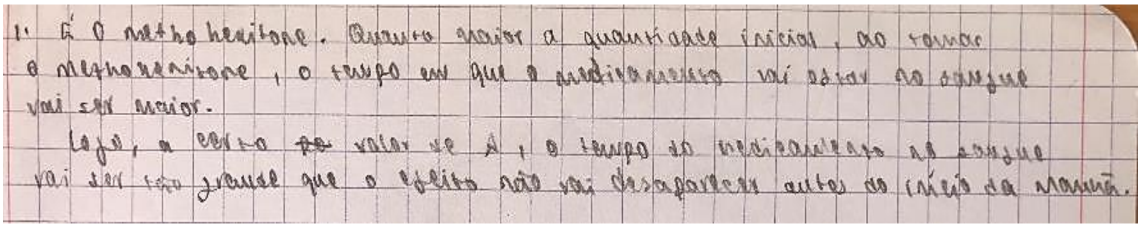


Figura 7: 1ª Versão (T1) da resolução da pergunta 1 do par Carlos-César

Nestas situações, o feedback dado foi no sentido de recordar os alunos que eram apresentadas duas questões distintas e que ambas pediam uma resposta explícita, repetindo a questão ainda não respondida: *"E o que acontece, afinal, se alguém tomar, por engano, Methohexitone?"*.

Na segunda versão da resolução da tarefa, verificou-se que o grupo melhorou o seu trabalho, tendo apresentado uma resposta à questão feita no comentário escrito. Importa referir que também foi dado feedback no sentido de questionar os alunos sobre a fundamentação da resposta apresentada. Verificou-se que os alunos fundamentaram melhor a resposta, recorrendo a cálculos e representações gráficas (Figura 8).

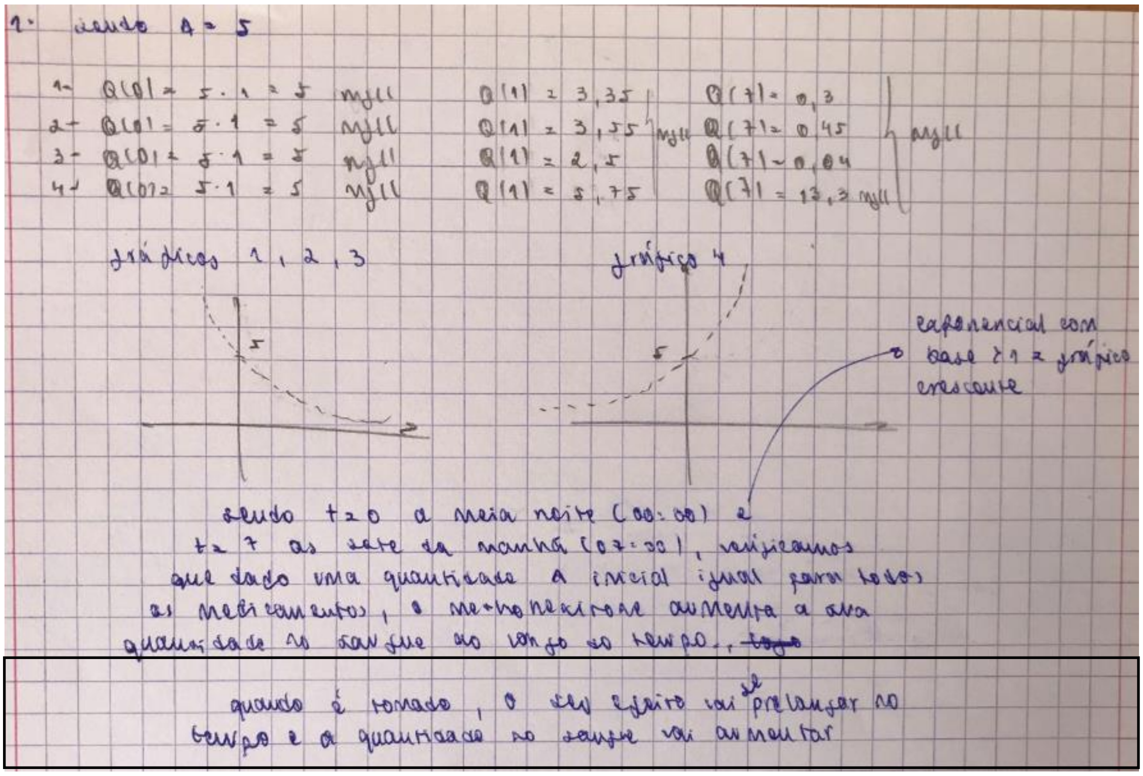
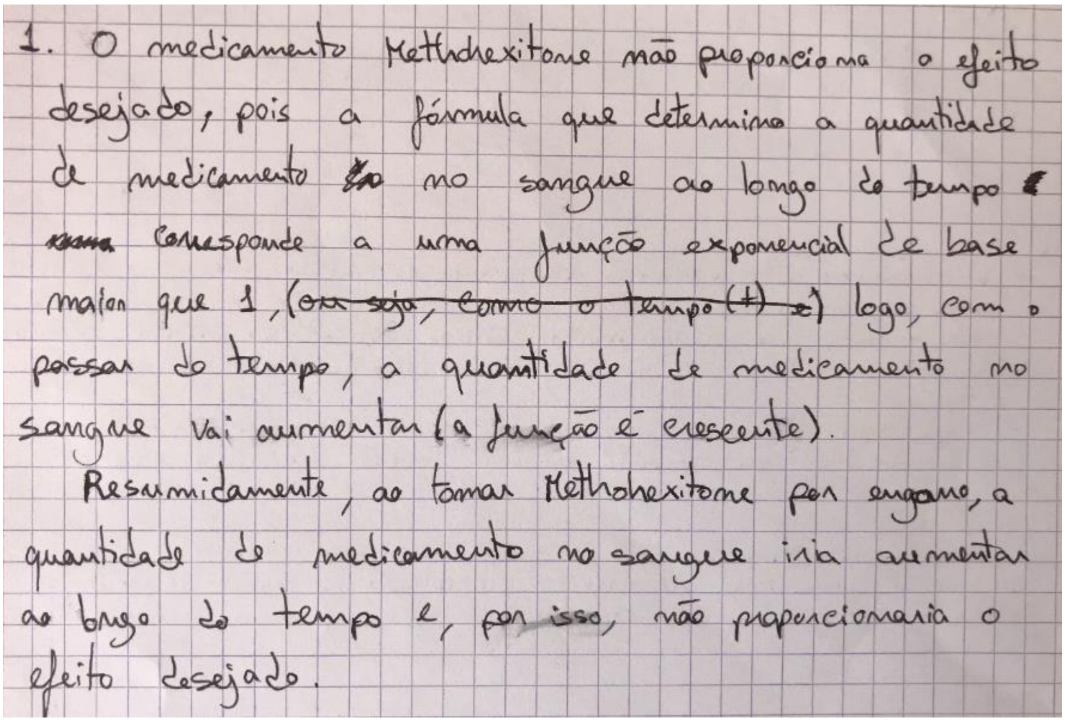


Figura 8: 2ª Versão (T1) da resolução da pergunta 1 do par Carlos-César

Tipo B (Contexto do Problema)

Na pergunta 1, o par Bernardo-Bento apresenta uma resposta completa (Figura 9). No entanto, não explicita completamente o significado no contexto do problema.


1. O medicamento Methohexitone não proporciona o efeito desejado, pois a fórmula que determina a quantidade de medicamento no sangue ao longo do tempo corresponde a uma função exponencial de base maior que 1, ~~(ou seja, como o tempo (t)~~) logo, com o passar do tempo, a quantidade de medicamento no sangue vai aumentar (a função é crescente).

Resumidamente, ao tomar Methohexitone por engano, a quantidade de medicamento no sangue iria aumentar ao longo do tempo e, por isso, não proporcionaria o efeito desejado.

Figura 9: 1ª Versão (T1) da resolução da pergunta 1 do par Bernardo-Bento

Nesta situação, o feedback considerou a resposta dada pelos alunos e procurou questionar o grupo sobre o seu sentido no contexto do problema: *"E o que significa, afinal, que o Methohexitone não tem o efeito desejado? O que acontece? Procurem responder no contexto do problema".*

De acordo com os registos áudio, quando abordei este grupo relativamente a possíveis dúvidas sobre os comentários escritos, ambos os alunos responderam: "Não, professora, já lemos. Está tudo *ok*". No desenvolvimento do trabalho, verificou-se o seguinte diálogo:

Bento: Na primeira, acho que podemos manter o primeiro parágrafo, mas depois temos de concluir melhor.
Bernardo: Mas a professora só falava de podermos justificarmos melhor, podemos acrescentar um gráfico.
Bento: Não, a professora também fala daquilo do contexto do problema, temos de explicar melhor o que acontece. Vai lá ver.
(…)
Bernardo: Mas nós já fazemos isso, dizemos aqui que o efeito não é o desejado.
Bento: Sim, mas eu acho se a professora está a pedir é porque podemos pôr mais qualquer coisa. Põe que ao contrário do desejado, entre

parêntesis que é o efeito desparecer, o medicamento aumenta e o efeito torna-se mais intenso.

Este diálogo evidencia como os alunos leram os comentários escritos e debateram entre si o que compreenderam que era pedido. Para além disso, é possível verificar que, para um dos alunos, o comentário relativo ao contexto do problema, passou despercebido, tendo sido relembrado pelo seu colega. Depois de o discutirem, os alunos acabam por decidir aquilo que precisavam de fazer para melhorar o trabalho.

Na segunda produção escrita, este grupo apresenta alterações na sua resposta (Figura 10).

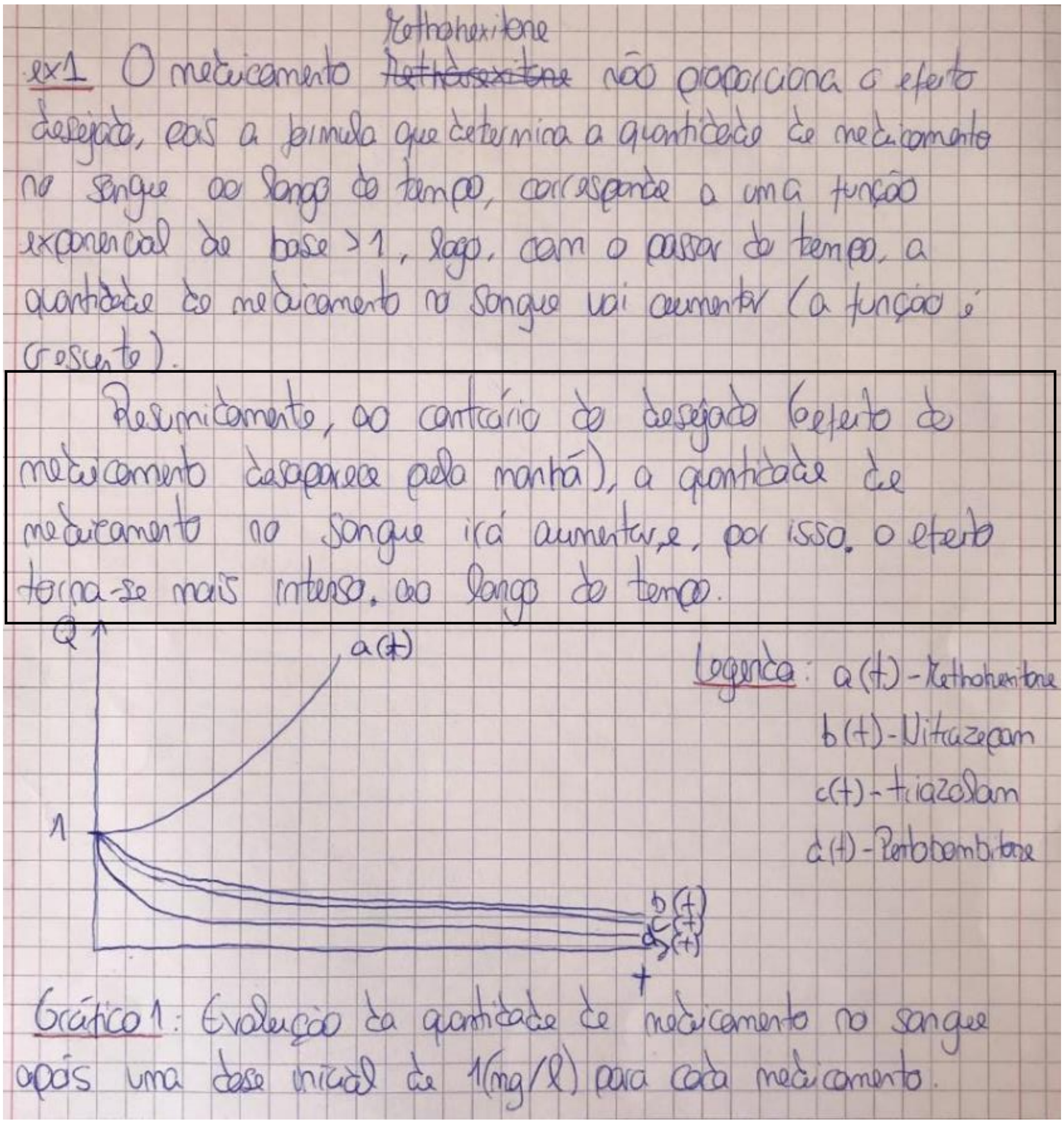


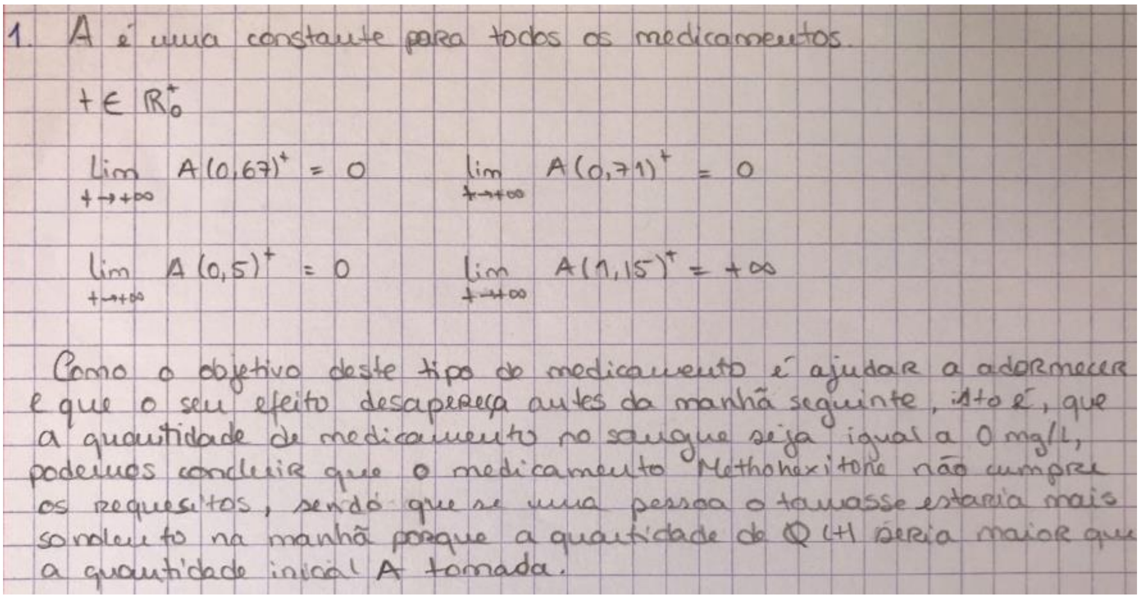
Figura 10: 2ª Versão (T1) da resolução da pergunta 1 do Par Bernardo-Bento

A conclusão que apresentam foi melhorada e está mais especifica no contexto do problema, sugerindo que os alunos compreenderam o feedback recebido. Ainda assim, considera-se que os alunos poderiam ter feito referência à sonolência que o indivíduo sentiria ou ao facto de este não conseguir acordar na manhã seguinte.

Verificou-se que um dos grupos com este tipo de produção escrita não apresentou alterações no seu trabalho depois de ter recebido feedback. Neste sentido, não se observaram melhorias.

<u>Tipo C</u> (Fundamentação)

Na primeira versão (Figura 11), o par Ana-Alberto identifica corretamente o medicamento que não proporciona o efeito desejado, mas apresenta alguns elementos que não justifica devidamente.



1. A é uma constante para todos os medicamentos.

$t \in \mathbb{R}_0^+$

$\lim_{t \to +\infty} A(0,67)^t = 0$ $\lim_{t \to +\infty} A(0,71)^t = 0$

$\lim_{t \to +\infty} A(0,5)^t = 0$ $\lim_{t \to +\infty} A(1,15)^t = +\infty$

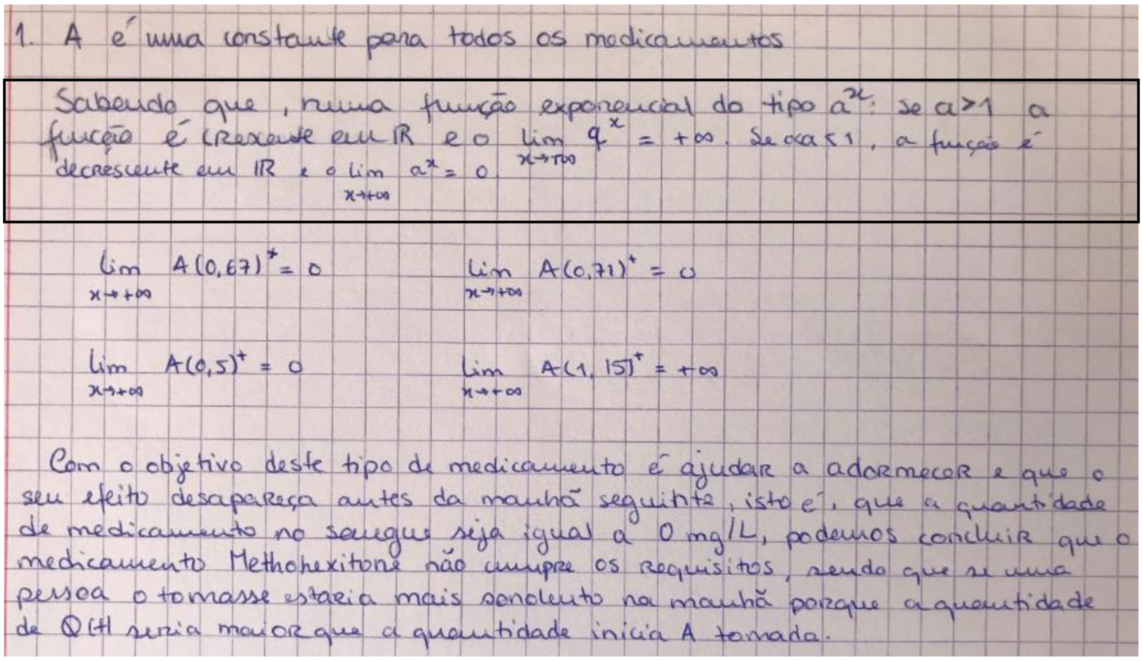
Como o objetivo deste tipo de medicamento é ajudar a adormecer e que o seu efeito desapereça antes da manhã seguinte, isto é, que a quantidade de medicamento no sangue seja igual a 0 mg/L, podemos concluir que o medicamento Methohexitone não cumpre os requesitos, sendo que se uma pessoa o tomasse estaria mais sonolento na manhã porque a quantidade de Q(t) seria maior que a quantidade inicial A tomada.

Figura 11: 1ª Versão (T1) da resolução da pergunta 1 do par Ana-Alberto

Nesta situação, o feedback dado foi no sentido de reconhecer o bom trabalho desenvolvido, alertando para os elementos que poderiam ser melhor fundamentados:

> *Bom trabalho: a vossa resposta está bem fundamentada visto que recorrem ao cálculo dos limites e tiraram as conclusões necessárias no contexto do problema. Podem complementá-la explicitando como obtiveram os valores dos limites apresentados.*

Na segunda versão (Figura 12), o par melhora a sua resposta, justificando os elementos apresentados. Isto sugere que o grupo leu e compreendeu o feedback, tendo mantido os elementos que foram reconhecidos como bem desenvolvidos.



1. A é uma constante para todos os medicamentos

Sabendo que, numa função exponencial do tipo a^x: se $a>1$ a função é crescente em IR e o $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$. Se $0<a<1$, a função é decrescente em IR e o $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$.

$\lim_{x \to +\infty} A(0,67)^t = 0$ $\lim_{x \to +\infty} A(0,71)^t = 0$

$\lim_{x \to +\infty} A(0,5)^t = 0$ $\lim_{x \to +\infty} A(1,15)^t = +\infty$

Com o objetivo deste tipo de medicamento é ajudar a adormecer e que o seu efeito desapareça antes da manhã seguinte, isto é, que a quantidade de medicamento no sangue seja igual a 0 mg/L, podemos concluir que o medicamento Methohexitone não cumpre os requisitos, sendo que se uma pessoa o tomasse estaria mais sonolento na manhã porque a quantidade de Q(t) seria maior que a quantidade inicial A tomada.

Figura 12: 2ª Versão (T1) da resolução da pergunta 1 do par Ana-Alberto

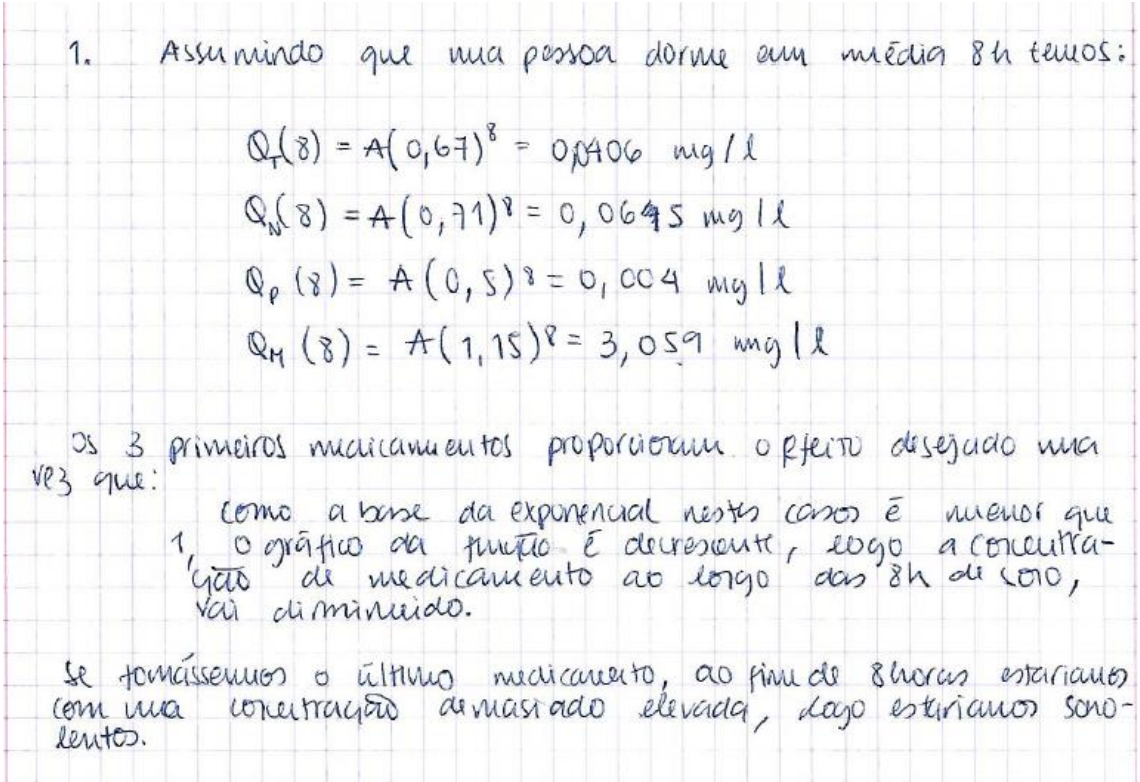
Observou-se que um dos grupos com este tipo de produção escrita não apresentou alterações na sua resposta depois de ter recebido feedback. Neste sentido, não houve melhorias do trabalho realizado.

Tipo D (Correção)

Na pergunta 1, o trio Marta-Mariana-Manuel apresenta uma resposta de acordo com a condição de que o indivíduo dorme oito horas, tendo, para isso, feito alguns cálculos (Figura 13).

O feedback dado incidiu sobre aspetos formais, uma vez que se observa que os resultados obtidos não dependem da constante A, sugerindo que foi considerada uma dose inicial: *"A vossa resposta está bem fundamentada e o caso que escolheram é claro (8 horas de sono). Qual foi a dose inicial (A) que consideraram? Devem indicar".*

Na segunda versão do trabalho (Figura 14), o grupo opta por apresentar a resposta entregue na primeira versão, fazendo algumas correções. Ao nível formal, os alunos indicam que consideraram uma dose inicial qualquer, referindo a constante utilizada no enunciado.



1. Assumindo que uma pessoa dorme em média 8h temos:

$Q_T(8) = A(0,67)^8 = 0,0406$ mg/l

$Q_N(8) = A(0,71)^8 = 0,0645$ mg/l

$Q_P(8) = A(0,5)^8 = 0,004$ mg/l

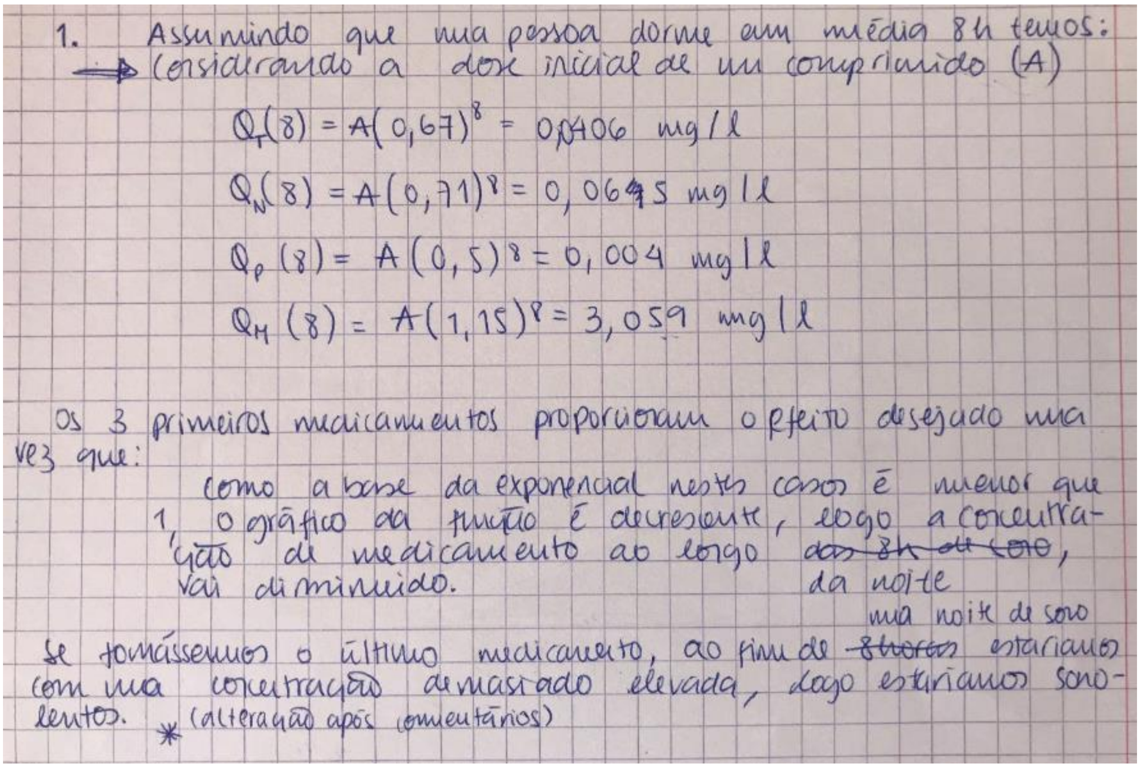
$Q_M(8) = A(1,15)^8 = 3,059$ mg/l

Os 3 primeiros medicamentos proporcionam o efeito desejado uma vez que:

como a base da exponencial nestes casos é menor que 1, o gráfico da função é decrescente, logo a concentração de medicamento ao longo das 8h de sono, vai diminuindo.

Se tomássemos o último medicamento, ao fim de 8 horas estaríamos com uma concentração demasiado elevada, logo estaríamos sonolentos.

Figura 13: 1ª Versão (T1) da resolução da pergunta 1 do trio Marta-Mariana-Manuel



1. Assumindo que uma pessoa dorme em média 8h temos:
→ considerando a dose inicial de um comprimido (A)

$Q_T(8) = A(0,67)^8 = 0,0406$ mg/l

$Q_N(8) = A(0,71)^8 = 0,0645$ mg/l

$Q_P(8) = A(0,5)^8 = 0,004$ mg/l

$Q_M(8) = A(1,15)^8 = 3,059$ mg/l

Os 3 primeiros medicamentos proporcionam o efeito desejado uma vez que:

como a base da exponencial nestes casos é menor que 1, o gráfico da função é decrescente, logo a concentração de medicamento ao longo ~~das 8h de sono~~, da noite vai diminuindo.

uma noite de sono

Se tomássemos o último medicamento, ao fim de ~~8 horas~~ estaríamos com uma concentração demasiado elevada, logo estaríamos sonolentos.
* (alteração após comentários)

Figura 14: 2ª Versão (T1) da resolução da pergunta 1 do trio Marta-Mariana-Manuel

Estes dados sugerem que os alunos leram os comentários escritos, mas que não procederam a uma revisão cuidada do trabalho apresentado ou que não compreenderam aquilo que estava escrito. Foi acrescentada a indicação relativa à quantidade inicial sem a consequente alteração nos resultados apresentados que, neste caso, teriam de ser dependentes desta constante. Trata-se da situação em que os alunos fizeram alterações ao seu trabalho, mas não se verificou uma melhoria significativa.

Tipo E (Enriquecimento)

Na pergunta 2, o par Vasco-Vicente apresenta uma resposta completa, optando pelo medicamento que proporciona um efeito mais eficaz com uma quantidade inicial menor e recorrendo a uma representação gráfica para o fundamentar (Figura 15).

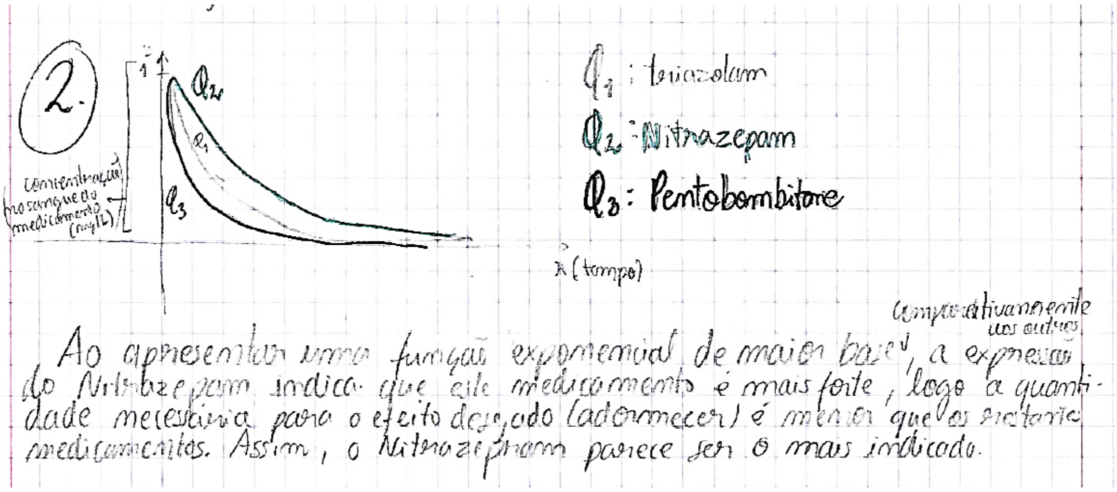


Figura 15: 1ª Versão (T1) da resolução da pergunta 2 do par Vasco-Vicente

Nesta situação, o feedback dado foi no sentido de promover um enriquecimento do trabalho desenvolvido, questionando os alunos: "*E se o paciente dormir poucas horas por noite? Nitrazepam continua a ser, para vocês, o mais indicado?*"

Na segunda versão, o grupo melhora o seu trabalho uma vez que acrescenta uma resposta à questão lançada no feedback sobre a hipótese de o paciente dormir poucas horas por noite (Figura 16).

Os aspetos acrescentados sugerem que o grupo leu os comentários escritos, tendo procurado desenvolver o seu trabalho de forma a responder à questão colocada.

Verificou-se que três dos grupos com este tipo de produção escrita não apresentaram alterações no seu trabalho depois do feedback escrito. Por isso, não se observaram melhorias.

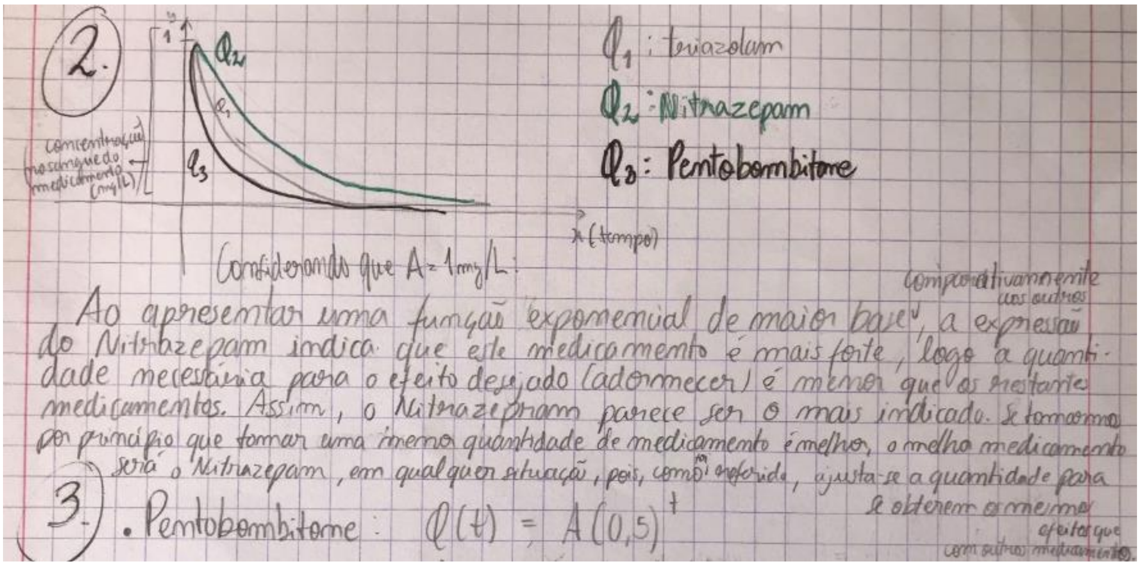


Figura 16: 2ª Versão (T1) da resolução da pergunta 2 do par Vasco-Vicente

Tarefa 2

O Quadro 8 apresenta um resumo geral do número de comentários fornecidos a cada tipo de situação (A, B, C, D ou E) e o número de casos em se observou ou não evolução.

Quadro 8: Comentários escritos fornecidos na Tarefa 2

Tipo	Comentários	Verificaram-se melhorias?	
		Sim	Não
A	4	2	2
B	1	1	0
C	8	6	2
D	5	5	0
E	0	0	0

A partir do Quadro 8, observa-se que foram fornecidos mais comentários (8) do tipo C, *fundamentação*, tendo seis desses grupos melhorado o seu trabalho. *Corrigir* foi a segunda situação com maior número de feedbacks dados. Importa notar que em todos os tipos, à exceção do A, o número de trabalhos melhorados na segunda versão é superior àqueles em que isto não se verificou. Não foram fornecidos comentários a situações do tipo E, *enriquecimento*.

Tipo A (Incompletude)

Na pergunta 1, o par Vasco-Vicente fez alguns cálculos e apresentou outros elementos, mas não explicitou a relação entre as funções e o seu significado (Figura 17).

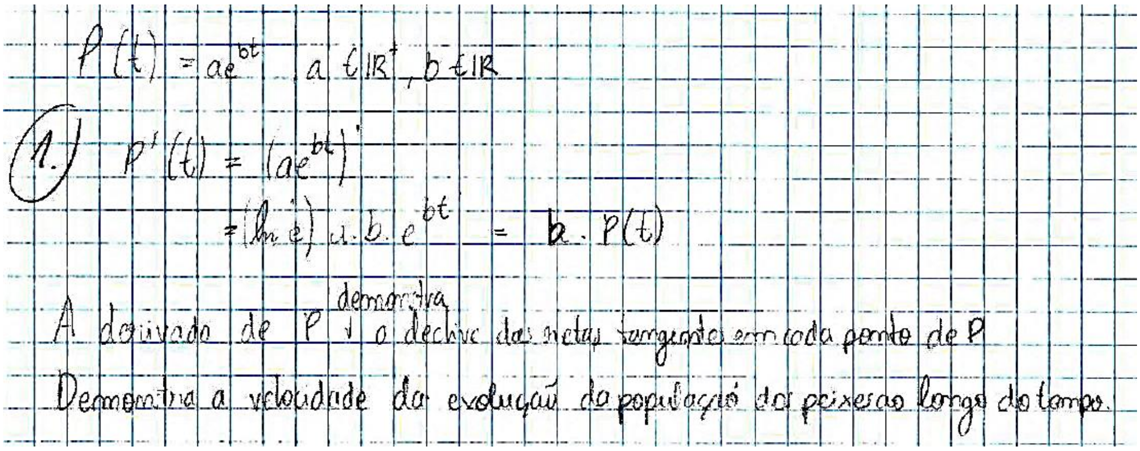


Figura 17: 1ª Versão (T2) da resolução da pergunta 1 do par Vasco-Vicente

Nesta situação, o feedback escrito pretendeu questionar o grupo sobre a resposta que era pedida no enunciado: *"Qual é, afinal, a relação que se estabelece entre P e P'? Devem explicitar"*.

Na segunda versão do seu trabalho (Figura 18) o grupo explicita a relação e o seu significado, sugerindo que leu os comentários e compreendeu o que era pedido:

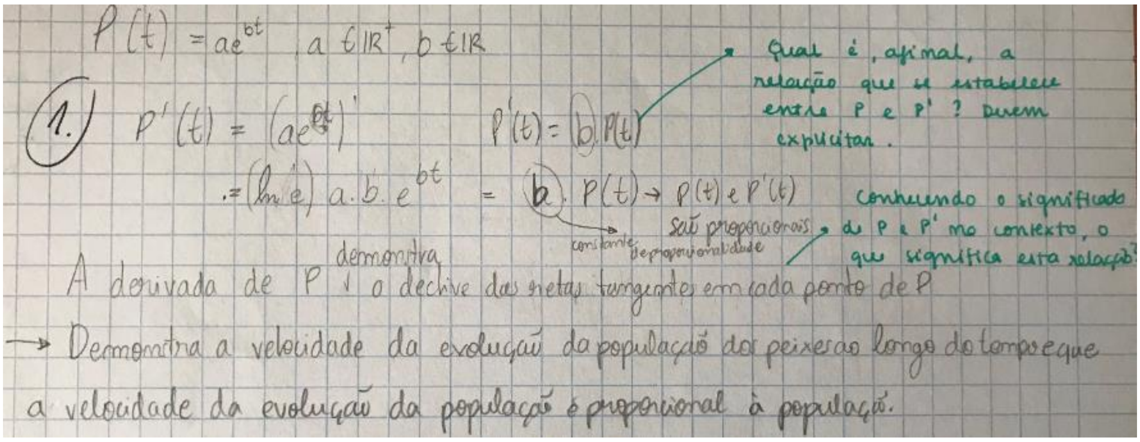


Figura 18: 2ª Versão (T2) da resolução da pergunta 1 do par Vasco-Vicente

Verificou-se que dois grupos com este tipo de produção escrita não apresentaram alterações no seu trabalho depois de ter recebido feedback. Desta forma, não se observaram melhorias.

Tipo B (Contexto do Problema)

Na pergunta 1, o par Ana-Alberto explicitou a relação entre as funções, mas não apresentou o significado no contexto do problema (Figura 19).

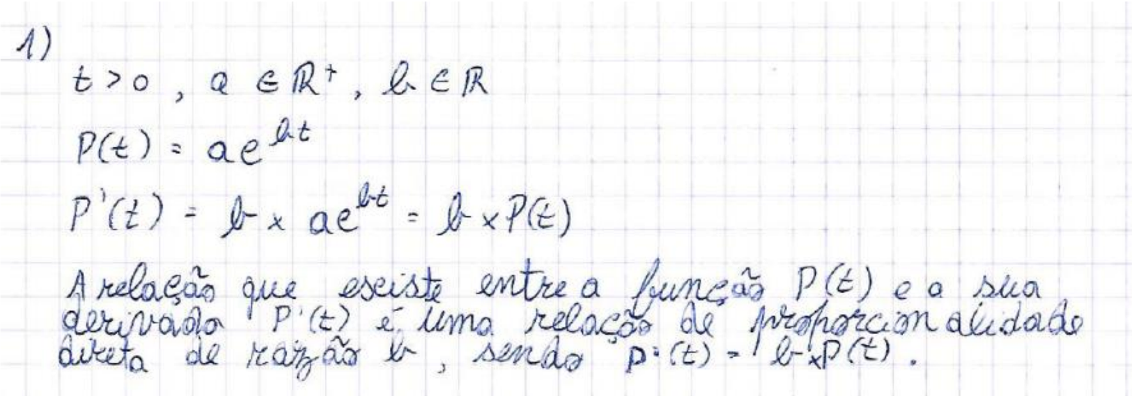

1)
$t > 0$, $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}$
$P(t) = ae^{bt}$
$P'(t) = b \times ae^{bt} = b \times P(t)$
A relação que esciste entre a função $P(t)$ e a sua derivada $P'(t)$ é uma relação de proporcionalidade direta de razão b, sendo $P'(t) = b \times P(t)$.

Figura 19: 1ª Versão (T2) da resolução da pergunta 1 do par Ana-Alberto

Nesta situação, o feedback dado solicita que os alunos explicitem o significado pretendido: "*A forma como apresentam a relação é clara e completa. Mas qual é o seu significado no contexto? O que significam P e P'?*".

Na segunda versão, tal como podemos observar na Figura 20, o grupo apresenta alterações na sua resposta, tendo acrescentado o significado da relação, conforme sugerido nos comentários escritos.

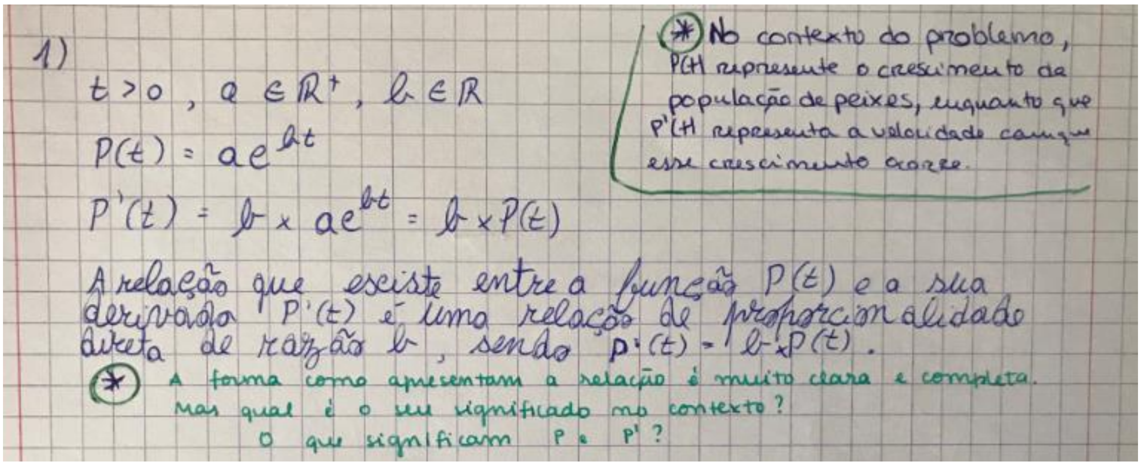

1)
$t > 0$, $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}$
$P(t) = ae^{bt}$
$P'(t) = b \times ae^{bt} = b \times P(t)$
A relação que esciste entre a função $P(t)$ e a sua derivada $P'(t)$ é uma relação de proporcionalidade direta de razão b, sendo $P'(t) = b \times P(t)$.
(*) A forma como apresentam a relação é muito clara e completa. Mas qual é o seu significado no contexto? O que significam P e P'?
(*) No contexto do problema, P(t) representa o crescimento da população de peixes, enquanto que P'(t) representa a velocidade com que esse crescimento ocorre.

Figura 20: 2ª Versão (T2) da resolução da pergunta 1 do par Ana-Alberto

Estes dados sugerem que o grupo leu e compreendeu o feedback dado, compreendendo aquilo que faltava e tendo melhorado a sua resposta nesse sentido. Verifica-se que o grupo podia, ainda, ter apresentado o significado da relação no contexto.

Tipo C (Fundamentação)

Na pergunta 2.2., o par Bernardo-Bento apresenta uma previsão da quantidade de sardinha pescada nos anos seguintes, referindo que o faz a partir do modelo exponencial construído (Figura 21). No entanto, o grupo não fundamenta a sua resposta.

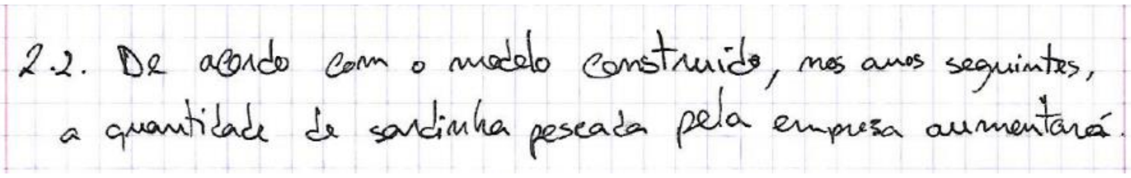

2.2. De acordo com o modelo construido, nos anos seguintes, a quantidade de sardinha pescada pela empresa aumentará.

Figura 21: 1ª Versão (T2) da resolução da pergunta 2.2. do par Bernardo-Bento

Nesta situação, o feedback escrito pretendeu questionar os alunos sobre a fundamentação da sua resposta: *"Como é que justificam esta resposta?"*.

Na segunda versão (Figura 22), o grupo melhora a sua resposta, fundamentando devidamente a previsão dada anteriormente.

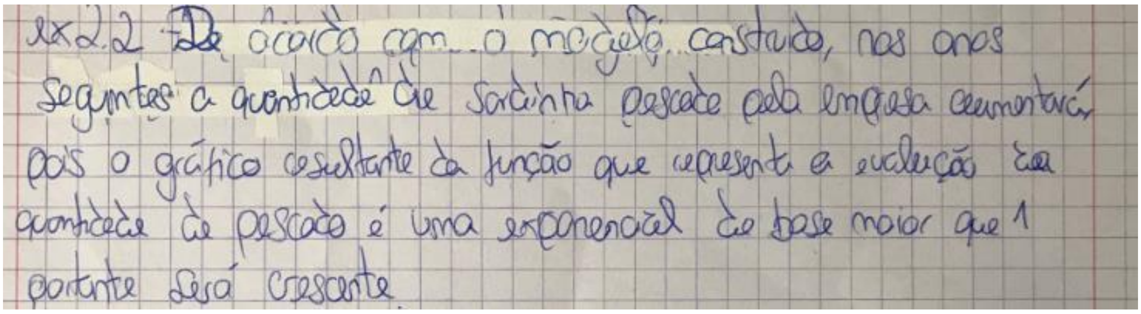

ex2.2 De acordo com o modelo construido, nos anos seguintes a quantidade de sardinha pescada pela empresa aumentará, pois o gráfico resultante da função que representa a evolução da quantidade de pescado é uma exponencial de base maior que 1 portanto será crescente

Figura 22: 2ª Versão (T2) da resolução da pergunta 2.2. do par Bernardo-Bento

Os dados sugerem que o par leu e compreendeu os comentários, tendo seguido as sugestões dadas e melhorado as respostas dadas.

Por fim, observou-se que dois dos grupos com este tipo de produção escrita não apresentaram alterações no seu trabalho depois de terem recebido feedback. Assim, não se observaram melhorias.

Tipo D (Correção)

Na pergunta 2.3.3, para fundamentar a previsão da quantidade pescada de acordo com o modelo logístico, o par Vasco-Vicente determinou o limite da função (Figura 23).

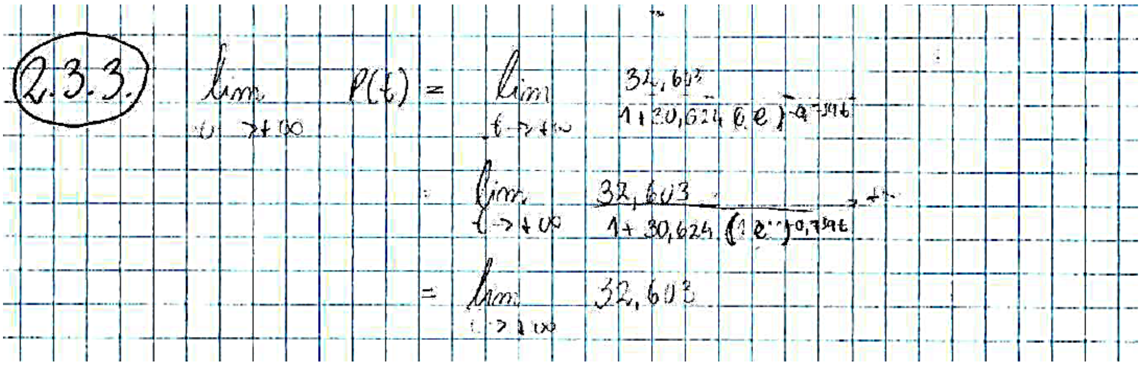


Figura 23: 1ª Versão (T2) da resolução da pergunta 2.3.3. do par Vasco-Vicente

Nesta situação, o feedback pretendeu sugerir uma revisão dos aspetos formais no desenvolvimento da resposta, sem identificar de que erro se tratava: “*Revejam os aspetos formais do processo de cálculo deste limite”*.

Na segunda versão do trabalho, o grupo corrigiu os aspetos formais necessários (Figura 24).

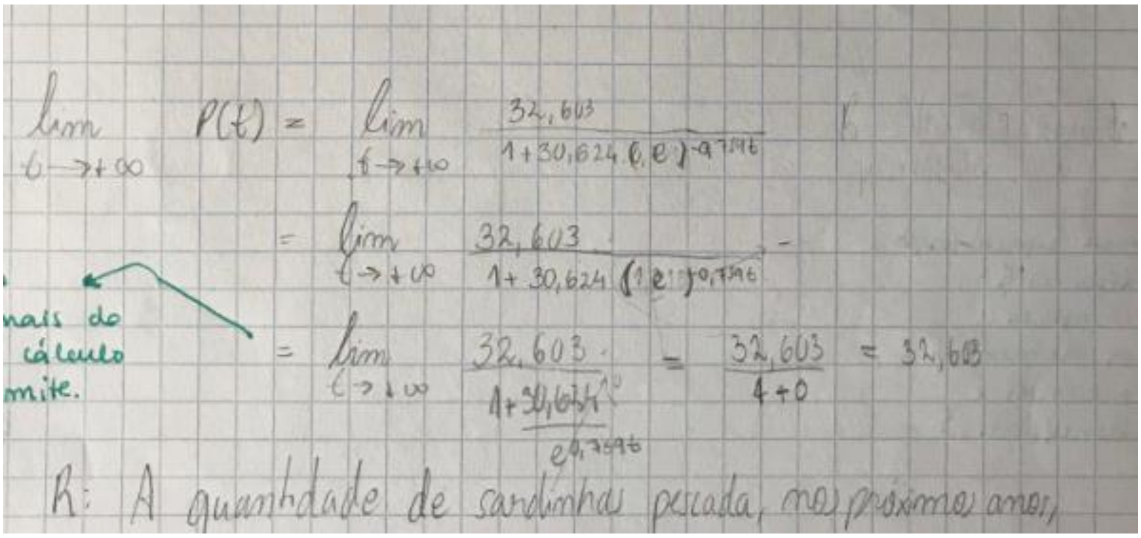


Figura 24: 2ª Versão (T2) da resolução da pergunta 2.3.3. do par Vasco-Vicente

Estes dados mostram que o grupo leu o comentário e que, após a revisão do trabalho, identificou e corrigiu o erro formal cometido.

Tarefa 3

À semelhança da análise das outras tarefas, o Quadro 9 apresenta um resumo geral do número de comentários fornecidos a cada tipo de situação e o registo da evolução na segunda versão.

Quadro 9: Comentários escritos fornecidos na Tarefa 3

Tipo	Comentários	Verificaram-se melhorias?	
		Sim	Não
A	6	1	5
B	3	2	1
C	8	5	3
D	3	3	0
E	0	0	0

A partir do Quadro 9, verifica-se que foram fornecidos mais comentários (8) nos trabalhos de tipo C, *fundamentação*, tendo 5 (63%) desses grupos melhorado o seu trabalho. *Incompletude* é a segunda situação com mais comentários escritos (6), mas, ao contrário do que se verifica nas outras tarefas, apenas um (17%) grupo apresenta melhorias. Importa referir que foram fornecidos 3 comentários a produções tipo D e todos os grupos melhoraram o seu trabalho. Para além disso, não foram fornecidos comentários a situações do tipo E, *enriquecimento*.

Tipo A (Incompletude)

Dadas as grandes dificuldades que os alunos sentiram na resolução da primeira pergunta, o feedback escrito dado aos alunos foi maioritariamente dirigido a este tipo, uma vez que os alunos apresentaram respostas incompletas.

Na primeira versão do seu trabalho, o trio Marta-Mariana-Manuel apresentou uma resposta bastante incompleta (Figura 25):

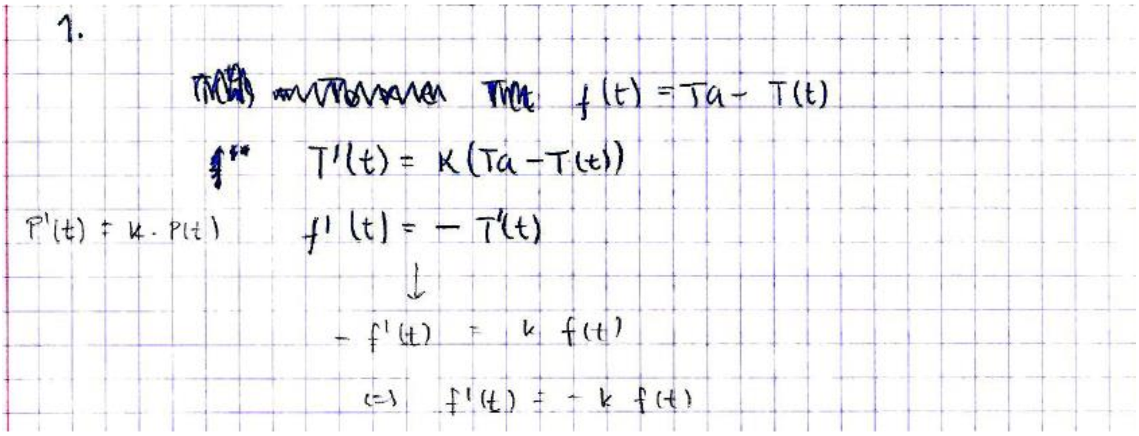


Figura 25: 1ª Versão (T3) da resolução da pergunta 1 do trio Marta-Mariana-Manuel

Recorrendo às notas registadas no final da aula, é possível saber que este foi um dos grupos que mais dificuldades apresentou nesta pergunta, tendo, até, optado por resolver a segunda pergunta sem terminar esta. Desta forma, o feedback dado foi no sentido de reconhecer os elementos já apresentados pelo grupo e dar alguma orientação, a partir do trabalho realizado nas aulas anteriores, para o desenvolvimento da resposta. Associando-o à relação que estabelecem entre a função *f* e a sua derivada, o comentário escrito foi: "*A partir do trabalho realizado na Tarefa 2, que função será f?*".

Na segunda versão do seu trabalho, o grupo apresenta alterações, tendo conseguido chegar à expressão da temperatura desejada (Figura 26):

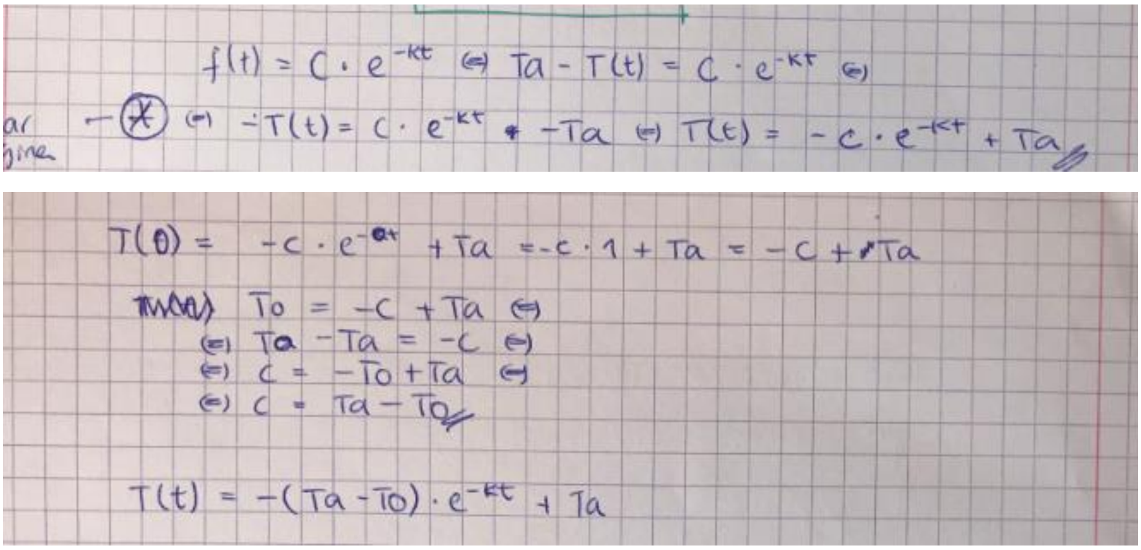


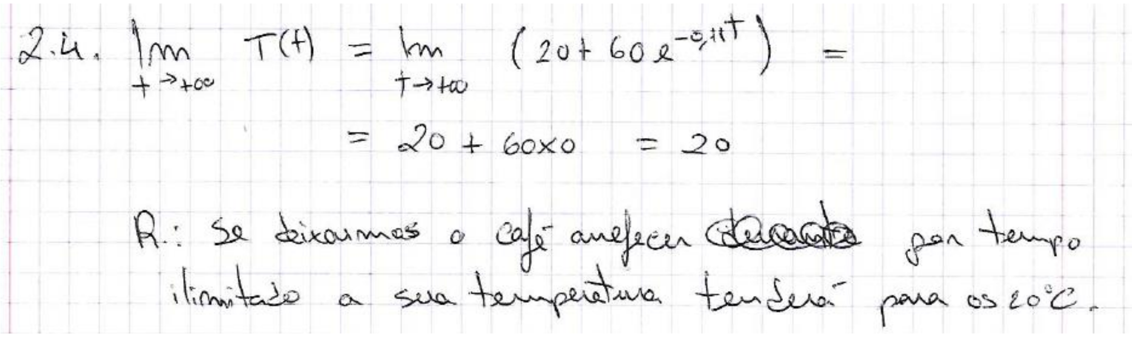
Figura 26: 2ª Versão (T3) da resolução da pergunta 1 do trio Marta-Mariana-Manuel

Os dados sugerem que o grupo leu e compreendeu o feedback, tendo desenvolvido trabalho nesse sentido. No entanto, tendo em conta a discussão que se verificou entre os alunos no final da aula anterior, não é possível garantir que estes alunos tenham obtido a expressão a partir dos comentários escritos, sendo possível que o tenham feito a partir do que ouviram dos colegas.

Este foi o único grupo que melhorou o seu trabalho depois de ter recebido feedback. Importa referir que os outros 5 grupos com este tipo de produção escrita receberam feedback no âmbito desta pergunta. No entanto, não fizeram alterações no trabalho, pelo que não apresentaram melhorias.

Tipo B (Contexto do Problema)

Na pergunta 2.4., o par Bernardo-Bento determina corretamente a temperatura para a qual tenderá o café (Figura 27).



2.4. $\lim_{t \to +\infty} T(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(20 + 60e^{-0,11t}\right) =$

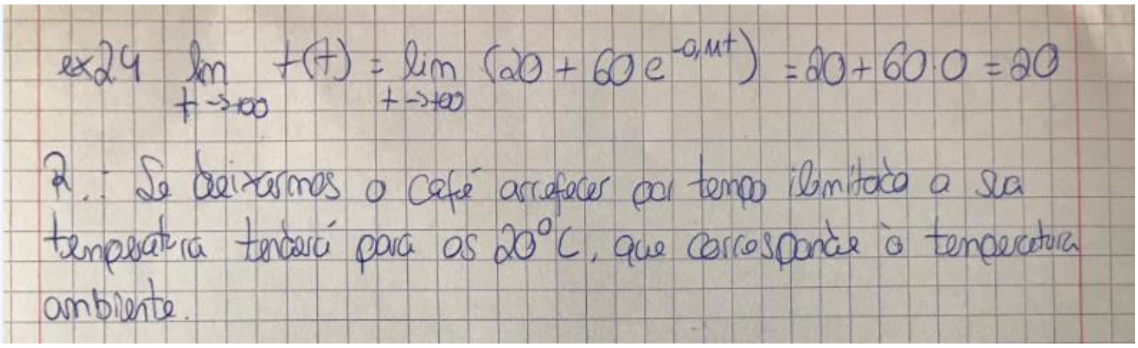
$= 20 + 60 \times 0 = 20$

R.: Se deixarmos o café arrefecer por tempo ilimitado a sua temperatura tenderá para os 20°C.

Figura 27: 1ª Versão (T3) da resolução da pergunta 2.4. do par Bernardo-Bento

Nesta situação, e tendo em conta que era pedido no enunciado a interpretação do resultado obtido, o feedback escrito questionou os alunos sobre o significado do limite calculado no contexto do problema: *"E que significado tem esta temperatura no contexto do problema?"*.

Na segunda versão (Figura 28), o grupo apresenta a interpretação necessária, revelando compreender o contexto do problema.



ex2.4 $\lim_{t \to +\infty} T(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(20 + 60e^{-0,11t}\right) = 20 + 60 \cdot 0 = 20$

R.: Se deixarmos o café arrefecer por tempo ilimitado a sua temperatura tenderá para os 20°C, que corresponde à temperatura ambiente.

Figura 28: 2ª Versão (T3) da resolução da pergunta 2.4. do par Bernardo-Bento

Estes dados sugerem que os alunos leram e compreenderam o comentário, tendo completado a sua resposta com os elementos que faltavam.

Verificou-se que um dos grupos com este tipo de produção escrita não fez alterações no trabalho depois de ter recebido feedback. Desta forma, não apresentou melhorias.

<u>Tipo C</u> (Fundamentação)

Na pergunta 1, o par Sara-Sofia obtém a expressão da temperatura desejada, utilizando uma estratégia diferente da dos restantes grupos: apresenta uma expressão inicial, descobrindo, depois, os valores das constantes que utiliza. Ainda assim, parte de uma condição não fundamentada (Figura 29):

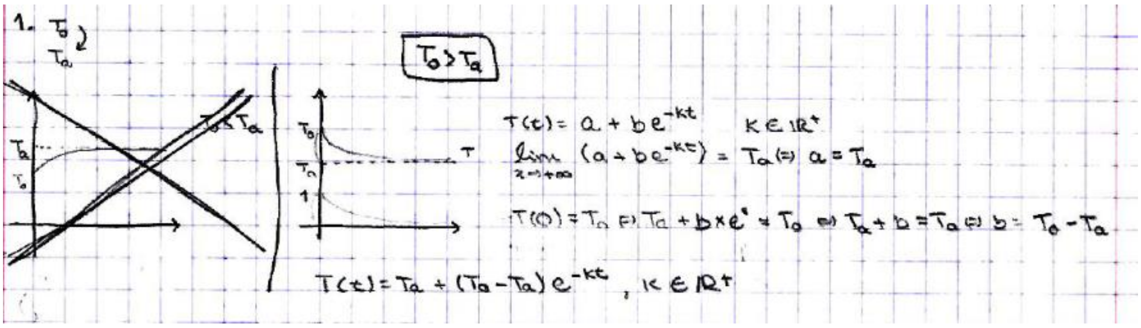


Figura 29: 1ª Versão (T3) da resolução da pergunta 1 do par Sara-Sofia

Recorrendo ao registo áudio do momento de trabalho depois de o grupo ter recebido feedback escrito, é possível encontrar o seguinte diálogo:

> **Sofia**: Professora, aqui que tipo de justificação é que temos de apresentar?
> **Professora**: Como é que vocês sabem, à partida, que a temperatura deste corpo vai ser traduzida por uma função exponencial?
> **Sofia**: Como temos falado de modelos exponenciais, achámos que este também seria um. Por isso criámos um.
> **Professora**: Mas como é que neste caso em concreto, com o enunciado desta Lei, podemos garantir que se trata de uma função exponencial?
> **Sara**: Não sei se sabemos justificar…
> **Professora**: Experimentem relembrar a discussão da aula de ontem, sobre a Tarefa 2. A relação de que o enunciado fala não vos lembra nada?

Através deste diálogo, podemos perceber que as alunas assumiram no início da sua resolução que podiam recorrer a uma função exponencial, não considerando a justificação necessária. Na segunda versão do seu trabalho, depois do feedback escrito e complementado com o feedback oral, verifica-se que as alunas compreenderam o propósito do comentário feito e as sugestões dadas de forma oral, apresentando a justificação necessária (Figura 30).

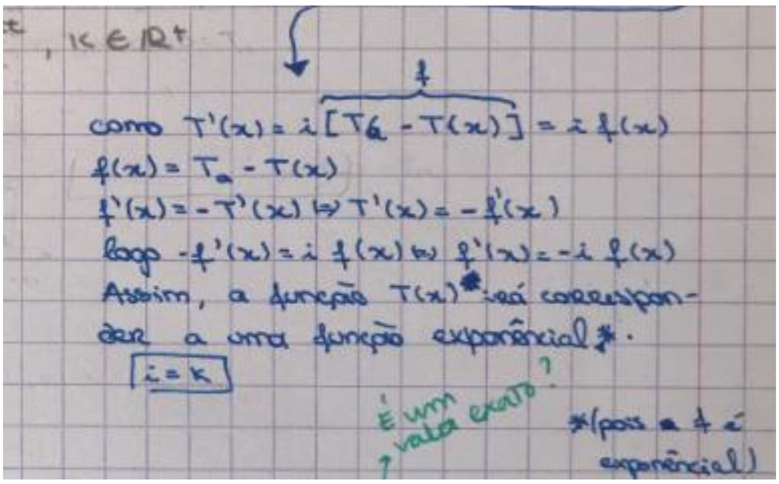


Figura 30: 2ª Versão (T3) da resolução da pergunta 1 do par Sara-Sofia

Observou-se que três dos grupos com este tipo de produção escrita não apresentaram alterações no seu trabalho depois de ter recebido feedback. Desta forma, não se verificaram melhorias.

Tipo D (Correção)

Na pergunta 2.2., relativa ao tempo de espera para beber o café a uma determinada temperatura, o par Bernardo-Bento dá a resposta apresentada na Figura 31:

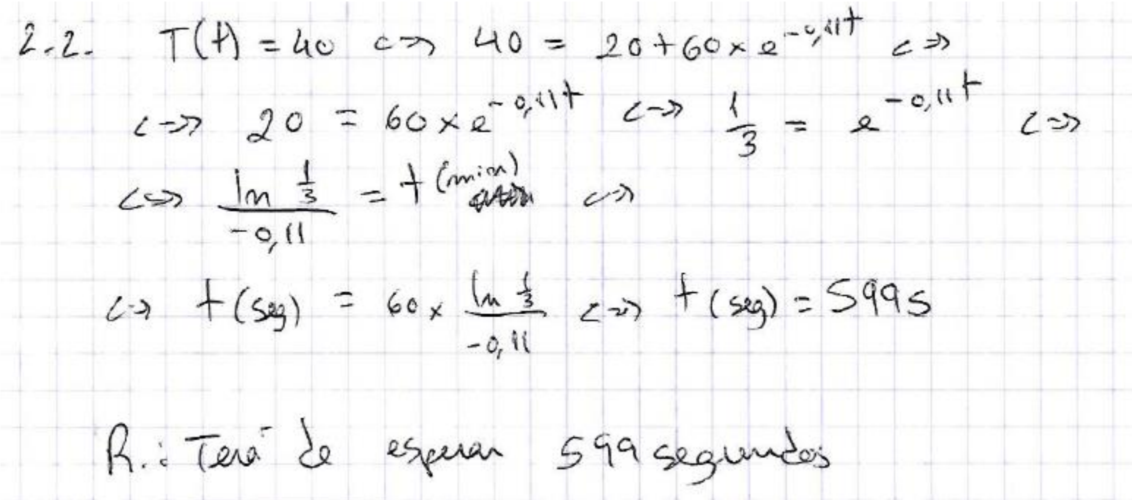


Figura 31: 1ª Versão (T3) da resolução da pergunta 2.2. do par Bernardo-Bento

Tal com é visível na Figura 31, para apresentar a sua resposta em segundos, o par recorre a uma notação desadequada do ponto de vista formal. Neste caso, o feedback pretendeu sugerir ao grupo uma revisão destes aspetos, questionando-o: *"«min» e «seg» são variáveis? Revejam os aspetos formais!*".

Na segunda versão do seu trabalho, o grupo melhora o seu trabalho, apresentando de forma adequada os cálculos efetuados anteriormente (Figura 32):

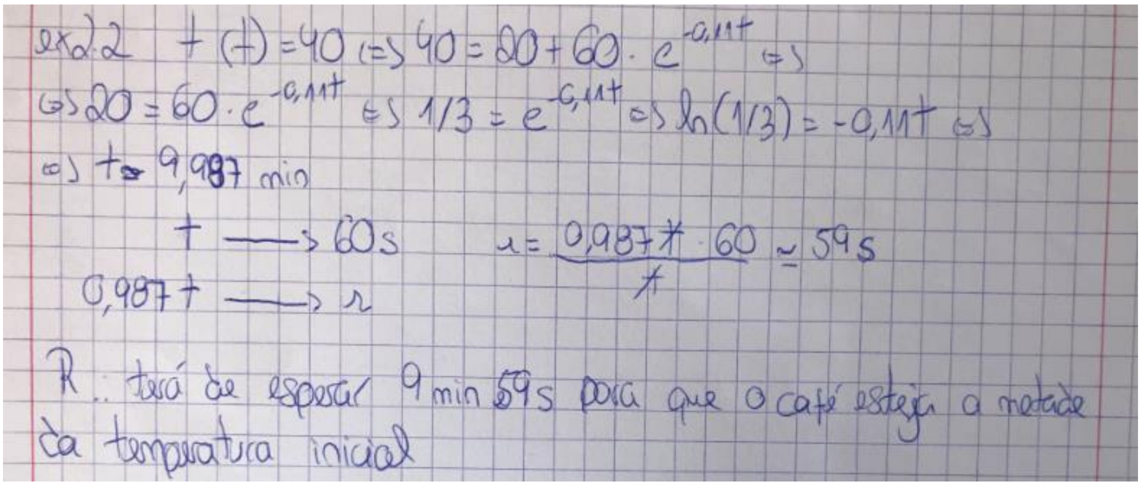


Figura 32: 2ª Versão (T3) da resolução da pergunta 2.2. do par Bernardo-Bento

Os dados sugerem que o grupo compreendeu o comentário escrito uma vez que alterou a forma como apresentou os elementos da sua resposta, tendo optado por o fazer de uma forma diferente, agora formalmente correta.

TPC

Optou-se por apresentar uma análise global das duas tarefas individuais, enviadas como trabalho de casa. À semelhança do que foi feito com as tarefas em grupo, este processo considerou as produções escritas pelos alunos e os comentários escritos fornecidos. O Quadro 10 apresenta um resumo geral dos comentários fornecidos a cada tipo de produção escrita e o registo sobre a evolução observada.

Quadro 10: Comentários fornecidos nos TPC

Tipo	Comentários	Verificaram-se melhorias?	
		Sim	Não
A	46	33	13
B	25	18	7
C	21	13	8
D	25	17	8
E	11	7	4

A partir do Quadro 10, verifica-se que foram fornecidos mais comentários (46) a situações do tipo A. Nestas situações, 33 grupos (72%) melhoraram o seu trabalho. *Explicitar o significado no contexto do problema* e *corrigir* foram as situações que ficaram em segundo lugar no número de feedbacks, contemplando 25 comentários. Em particular, na situação de tipo B, verificou-se que 18 grupos (72%) apresentaram melhorias no seu trabalho. Importa referir que em todas as situações se verificou que o número de trabalhos melhorados é superior àqueles em que isso não acontece.

Tipo A (Incompletude)

Na pergunta 1.1., pedia-se aos alunos que verificassem a existência da relação de proporcionalidade direta entre uma função exponencial e a sua derivada, indicando a respetiva constante de proporcionalidade. O Bernardo apresenta uma resolução (Figura 33) com todos os elementos necessários, contemplando a função e a sua derivada, mas não apresenta uma resposta explícita à questão:

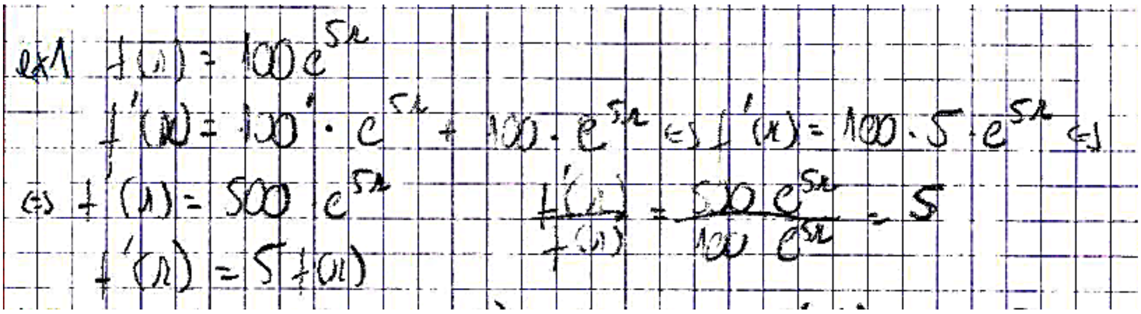


Figura 33: 1ª Versão (TPC) da resolução da pergunta 1.1. do Bernardo

Nesta situação, foi dado feedback escrito no sentido de reconhecer o trabalho desenvolvido visível nos elementos apresentados e sugerir que o aluno explicitasse a resposta ao que era pedido: *"Apresentas todos os elementos necessários. Qual é, afinal, a resposta ao que é pedido?"*.

Na segunda versão do trabalho (Figura 34), o aluno apresenta a sua resolução de forma mais estruturada, e indica explicitamente a constante de proporcionalidade pedida.

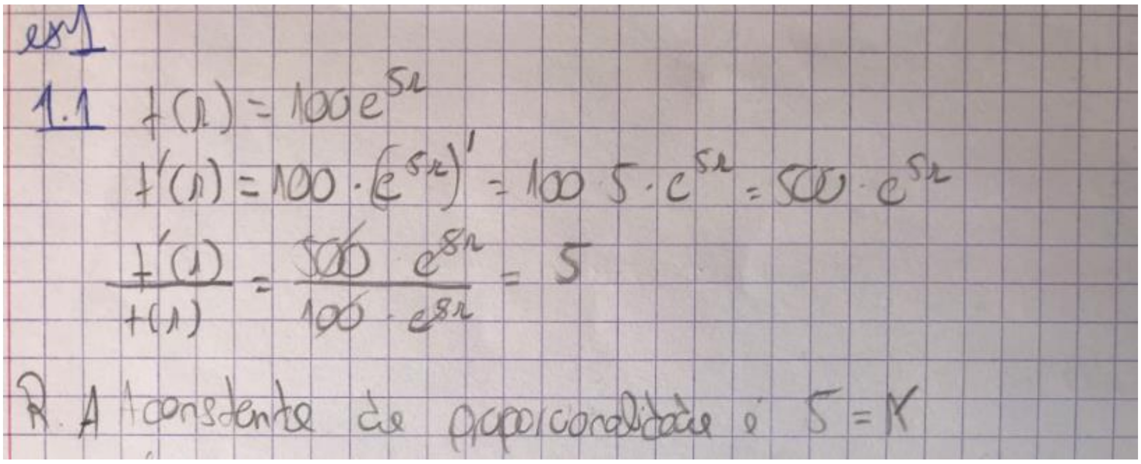


Figura 34: 2ª Versão (TPC) da resolução da pergunta 1.1. do Bernardo

Estes dados sugerem que o aluno leu os comentários escritos e os compreendeu, tendo completado o seu trabalho e mantido os elementos reconhecidos como corretos.

Verificou-se que em 13 situações deste tipo os alunos não alteraram os seus trabalhos depois de terem recebido feedback. Desta forma, não se verificaram melhorias.

<u>Tipo B</u> (Contexto do Problema)

Na pergunta 7.3. desta tarefa, era pedido aos alunos que indicassem a evolução que se verificava na população apresentada numa situação em particular e que interpretassem esse resultado. Na sua resolução (Figura 35), o Alberto apresenta alguns elementos pertinentes, mas não interpreta o seu significado no contexto do problema.

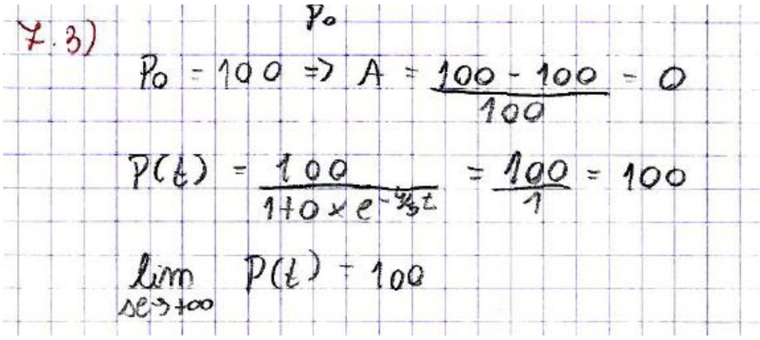


Figura 35: 1ª Versão (TPC) da resolução da pergunta 7.3. do Alberto

Neste caso, o feedback escrito pretendeu questionar o aluno sobre a interpretação pedida no enunciado: *"Mostras que P(t)=100. O que é que isto significa relativamente ao que é pedido?"* e *"Qual é a conclusão?"*.

Na segunda versão (Figura 36), o aluno melhora a resposta, contemplando a interpretação pedida.

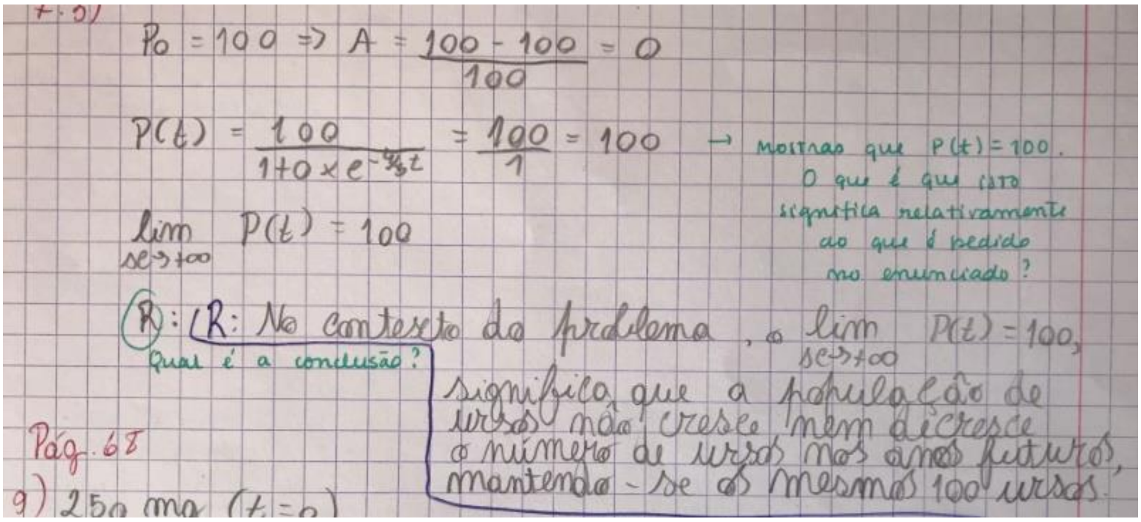


Figura 36: 2ª Versão (TPC) da resolução da pergunta 7.3. do Alberto

Os dados sugerem que o aluno leu e compreendeu o comentário, tendo acrescentado a resposta no contexto do problema de acordo com os elementos apresentados anteriormente.

Importa referir que em 7 situações deste tipo os alunos não alteraram o trabalho depois de receber feedback, pelo que não apresentaram melhorias.

<u>Tipo C</u> (Fundamentação)

Na pergunta 5.2., tendo sido apresentado um modelo de uma população de bactérias, era pedido aos alunos que indicassem qual dos parâmetros do modelo era possível conhecer, sabendo que a população duplicava ao fim de duas horas. Na sua resolução (Figura 37), a Ana indica apenas o parâmetro, não apresentando qualquer fundamentação para a sua resposta.

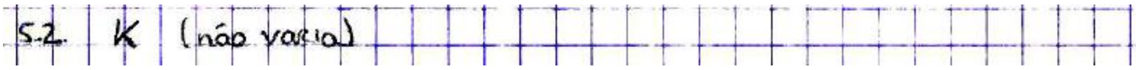


Figura 37: 1ª Versão (TPC) da resolução da pergunta 5.2. da Ana

Nesta situação, o feedback escrito dado foi no sentido de questionar a aluna sobre a justificação da sua resposta: *"Como é que fundamentas esta resposta?"*.

Na segunda versão do seu trabalho, a aluna apresenta evidentes melhorias, tendo desenvolvido de forma mais completa a sua resolução e apresentado a devida fundamentação (Figura 38):

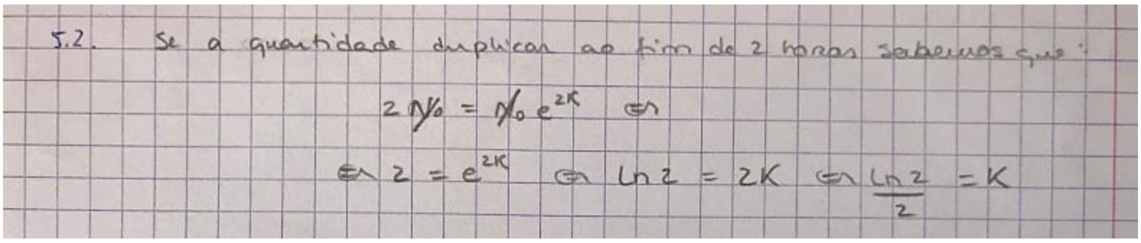


Figura 38: 2ª Versão (TPC) da resolução da pergunta 5.2. da Ana

Os dados sugerem que a aluna leu e compreendeu o comentário escrito, tendo fundamentando a escolha apresentada anteriormente.

Observou-se que em 8 situações deste tipo os alunos não melhoraram o seu trabalho depois do feedback escrito uma vez que não apresentaram alterações nas suas resoluções.

Tipo D (Correção)

Na pergunta 1.2., era pedido aos alunos que determinassem o valor de um limite relacionado com a função dada. Na sua resolução (Figura 39), o Carlos comete um erro de cálculo no desenvolvimento da sua resposta, impedindo-o de completar a resolução. Importa notar que o aluno identifica que a sua resposta não está bem desenvolvida, mas não compreende a razão pela qual isso acontece.

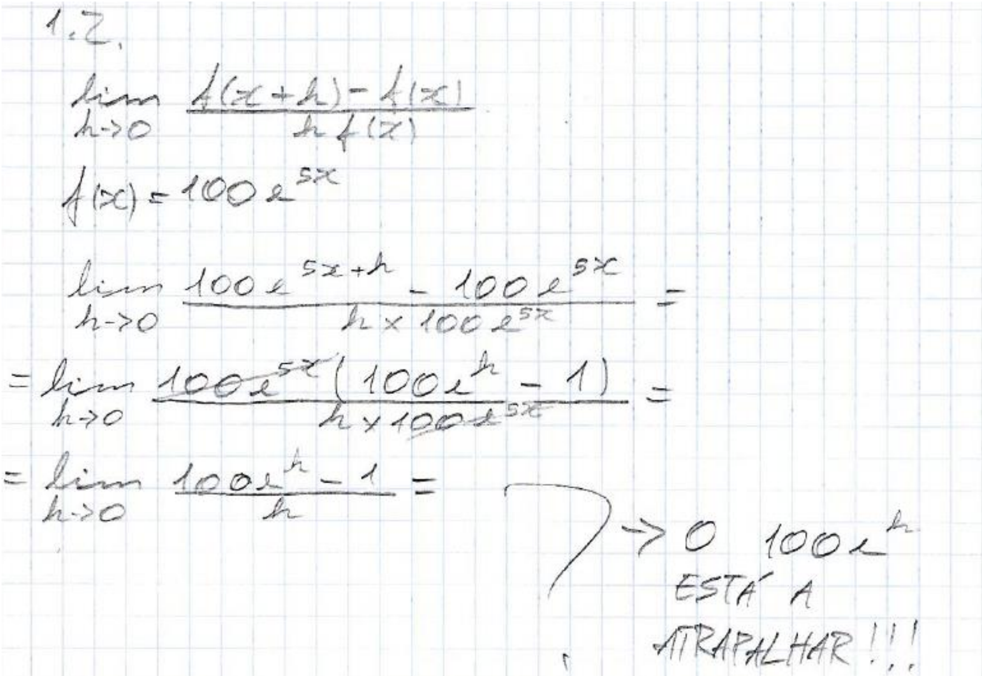


Figura 39: 1ª Versão (TPC) da resolução da pergunta 1.2. do Carlos

Nesta situação, tendo em conta que o aluno tinha compreendido que a sua resolução não estava bem desenvolvida, o feedback escrito pretendeu incentivar o aluno a rever o seu processo de trabalho: *"Revê com atenção os passos que deste para calcular este limite"*.

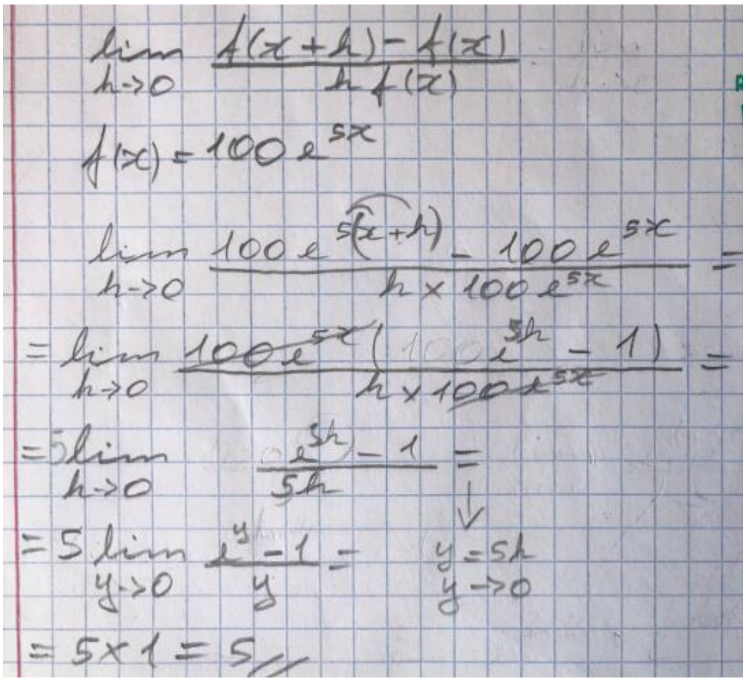


Figura 40: 2ª Versão (TPC) da resolução da pergunta 1.2. do Carlos

Na segunda versão do seu trabalho (Figura 40), o aluno melhora o seu trabalho, tendo obtido o valor pretendido.

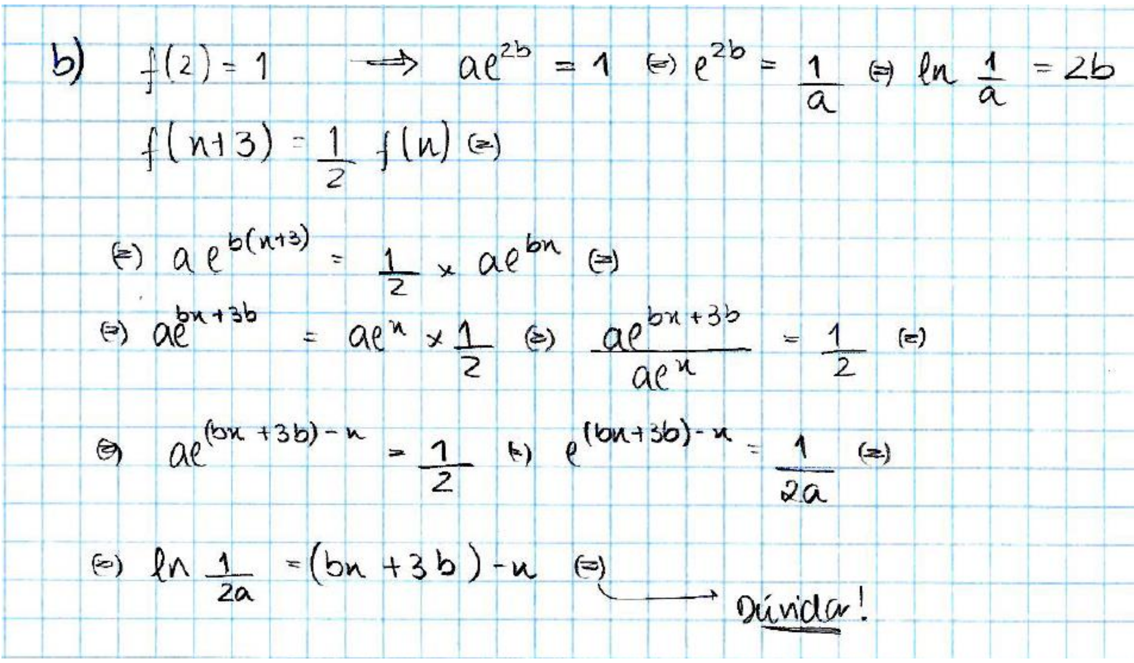
Estes dados sugerem que o aluno leu e compreendeu o comentário escrito, tendo conseguido identificar o erro cometido e, depois, chegado ao valor correto do limite apresentado.

Na pergunta 2, era pedido aos alunos que determinassem os valores das constantes de uma função, partindo de condições dadas. Na sua resolução (Figura 41), a Marta comete um erro de cálculo que a impede de obter os valores pretendidos. Observa-se que a aluna assinala que tem dúvidas no desenvolvimento da resposta.

O feedback dado pretendeu valorizar a estratégia escolhida, sugerindo a revisão do processo de cálculo: *"A estratégia que escolheste é adequada e estruturada. Revê bem os passos dos teus cálculos"*.

Na segunda versão (Figura 42), a aluna corrige o aspeto assinalado, mas comete um novo erro de cálculo que a impede de apresentar os valores corretos. Ainda que tenha alterado o seu trabalho, este não apresenta uma melhoria significativa.

Verificou-se que noutras 7 situações deste tipo os alunos não melhoraram o seu trabalho uma vez que não fizeram alterações nas suas resoluções depois de receber feedback.



b) $f(2) = 1 \longrightarrow ae^{2b} = 1 \Leftrightarrow e^{2b} = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \ln \frac{1}{a} = 2b$

$f(x+3) = \frac{1}{2} f(x) \Leftrightarrow$

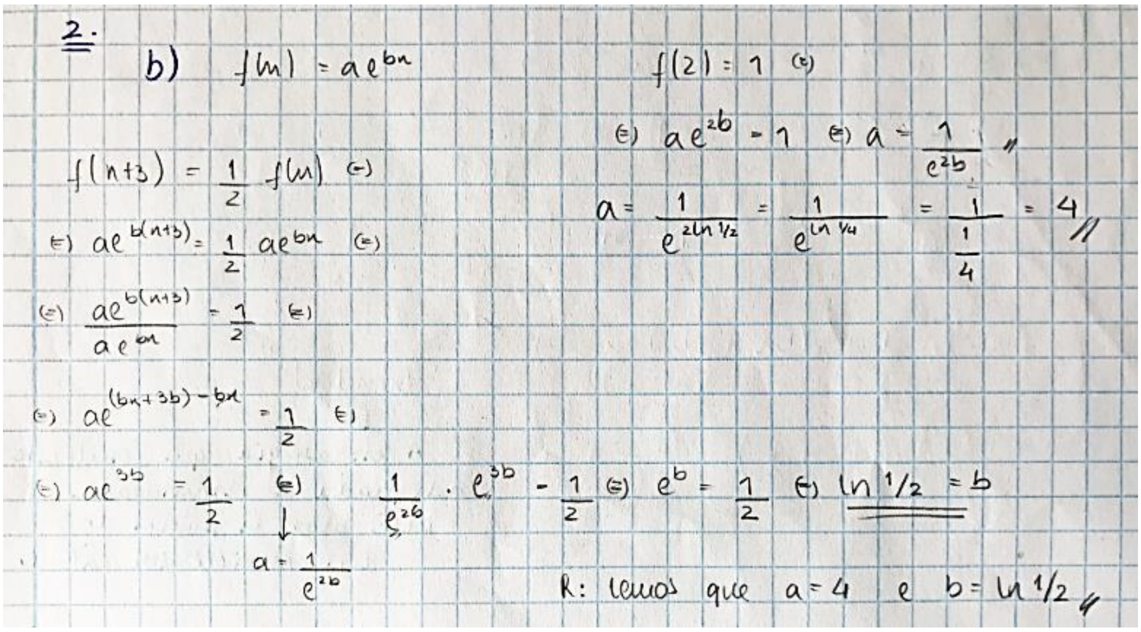
$\Leftrightarrow a e^{b(x+3)} = \frac{1}{2} \times ae^{bx} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ae^{bx+3b} = ae^{x} \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{ae^{bx+3b}}{ae^{x}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ae^{(bx+3b)-x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{(bx+3b)-x} = \frac{1}{2a} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln \frac{1}{2a} = (bx+3b) - x \Leftrightarrow \longrightarrow$ Dúvida!

Figura 41: 1ª Versão (TPC) da resolução da pergunta 2. b) da Marta



2. b) $f(n) = ae^{bn}$

$f(2) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ae^{2b} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{e^{2b}}$

$f(n+3) = \frac{1}{2} f(n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ae^{b(n+3)} = \frac{1}{2} ae^{bn} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{ae^{b(n+3)}}{ae^{bn}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ae^{(bn+3b)-bn} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ae^{3b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{e^{2b}} \cdot e^{3b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln 1/2 = b$

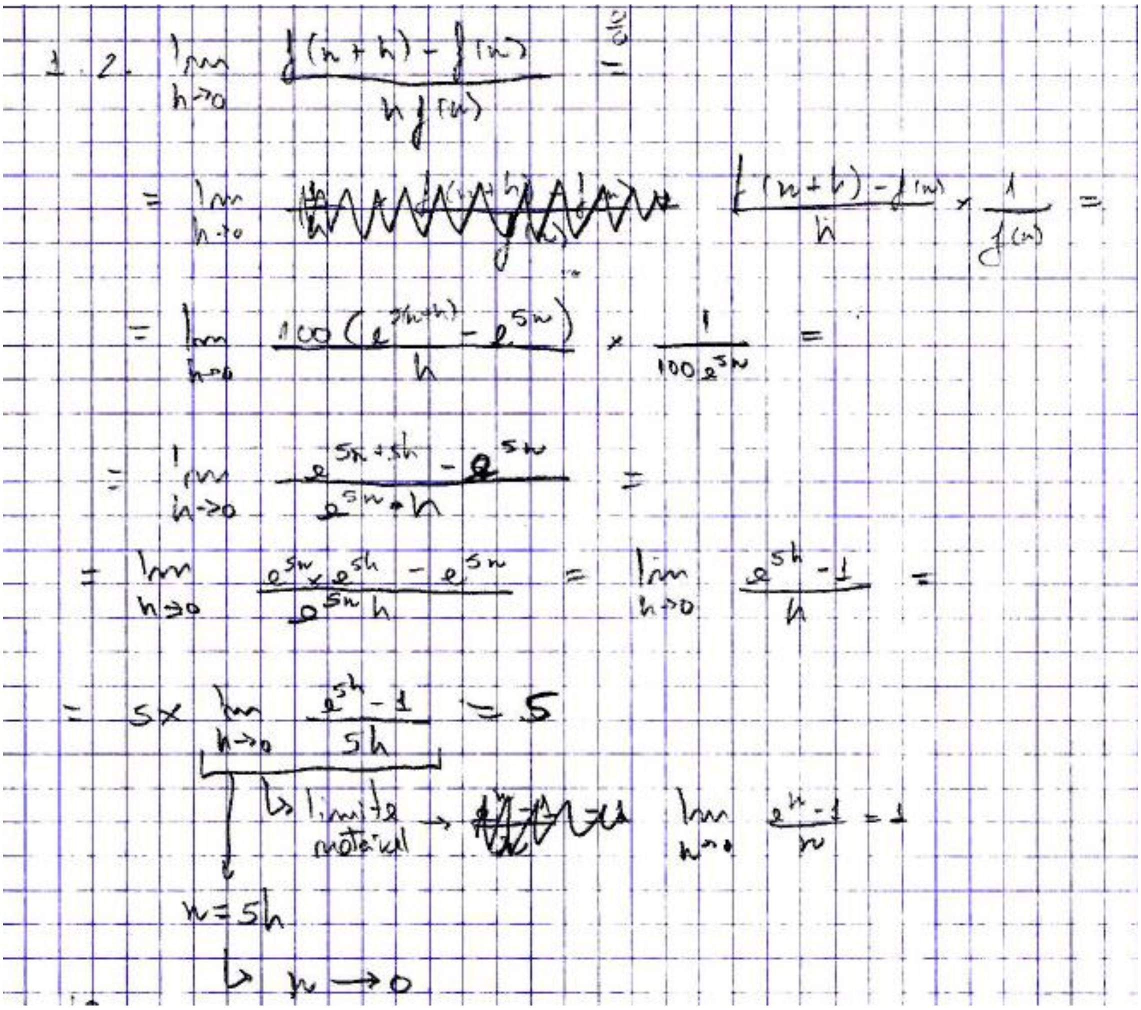
$a = \frac{1}{e^{2b}}$

$a = \frac{1}{e^{2\ln 1/2}} = \frac{1}{e^{\ln 1/4}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$

R: temos que $a = 4$ e $b = \ln 1/2$

Figura 42: 2ª Versão (TPC) da resolução da pergunta 2. b) da Marta

<u>Tipo E</u> (Enriquecimento)



1.2. $\lim_{h \to 0} \frac{f(n+h) - f(n)}{h f(n)} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{f(n+h) - f(n)}{h} \times \frac{1}{f(n)} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{100(e^{5(n+h)} - e^{5n})}{h} \times \frac{1}{100e^{5n}} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{5n+5h} - e^{5n}}{e^{5n} h} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{5n} \times e^{5h} - e^{5n}}{e^{5n} h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{5h} - 1}{h} =$

$= 5 \times \lim_{h \to 0} \frac{e^{5h} - 1}{5h} = 5$

limite notável $\rightarrow \lim_{n \to 0} \frac{e^{n} - 1}{n} = 1$

$n = 5h$

$n \to 0$

Figura 43: 1ª Versão (TPC) da resolução da pergunta 1.2. do Bento

Também na alínea 1.2, verificou-se que a maioria dos alunos optou por calcular o limite utilizando a expressão da função. O Bento resolveu a questão dessa forma e apresentou o valor correto (Figura 43). Para enriquecer o seu trabalho, o feedback pretendeu questioná-lo sobre uma estratégia alternativa: *"Haverá alguma forma de determinar este limite sem ter de introduzir a expressão de f?"*.

Na segunda versão (Figura 44), o aluno apresenta uma resolução alternativa, respondendo à questão deixada no comentário.

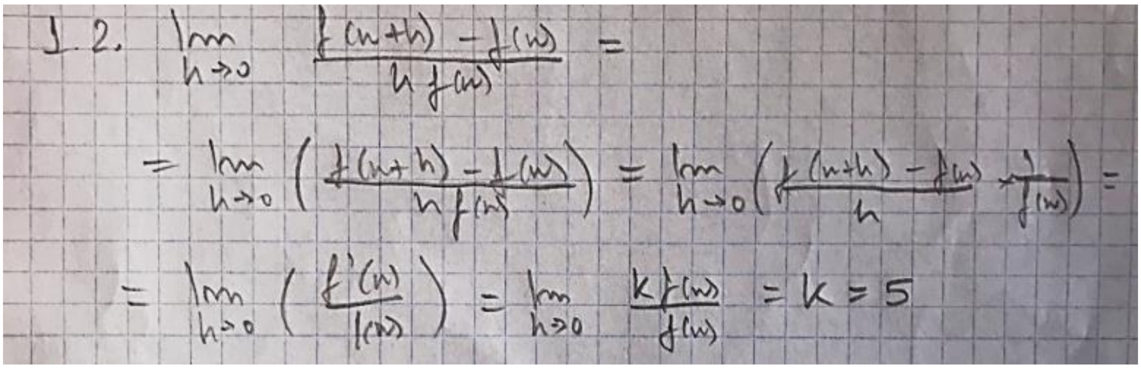


Figura 44: 2ª Versão (TPC) da resolução da pergunta 1.2. do Bento

Estes dados sugerem que o aluno leu e compreendeu o comentário escrito, tendo desenvolvido uma resolução alternativa, ainda que a que tinha apresentado anteriormente também estivesse correta.

Por fim, verificou-se que em 4 situações deste tipo os alunos não fizeram alterações ao trabalho depois de receber feedback escrito. Neste sentido, não apresentaram melhorias.

Caraterísticas do feedback escrito potenciadoras de aprendizagem

Para identificar caraterísticas do feedback escrito que se podem revelar potenciadoras da aprendizagem dos alunos, tive em consideração as respostas dos alunos ao segundo questionário para aceder à ideia que os alunos têm sobre esta dimensão em estudo e procedi à análise das produções escritas das diferentes tarefas.

Nas respostas ao segundo questionário (Anexo 13), é possível conhecer a experiência dos alunos durante a intervenção letiva. De facto, é possível perceber que utilidade os alunos atribuem ao feedback escrito que receberam nas diferentes tarefas propostas e as razões que a justificam e os aspetos que, na sua perspetiva, mais contribuíram para a sua aprendizagem. Tal como aconteceu no primeiro questionário, os treze alunos responderam a este questionário.

Na turma, onze alunos (85%) consideraram que o feedback escrito que receberam foi útil e dois alunos (15%) referem que esta prática não os ajudou, sendo que todos os alunos apresentaram uma justificação para a sua posição. Importa notar que os dois alunos que referem que esta prática de ensino não lhes foi útil são os mesmos alunos que, no primeiro questionário, já tinham defendido que o feedback escrito ao longo do seu percurso escolar não tinha tido utilidade na sua aprendizagem.

De forma geral, os alunos que defendem que esta prática de ensino os ajudou no trabalho realizado durante a intervenção letiva, identificam a periodicidade, o conteúdo, o facto de não corrigir, a especificidade, a forma, o contexto e o modo de operacionalização como as caraterísticas principais para que isso tenha acontecido (Quadro 11). Verificou-se que houve alunos que apresentaram mais do que uma razão para a utilidade do feedback escrito no seu trabalho.

Quadro 11: Caraterísticas mais úteis do feedback escrito

Caraterística	Frequência Absoluta	Frequência Relativa
Periodicidade	8	62%
Conteúdo	7	54%
Não corrigir	4	31%
Especificidade	2	15%
Forma	2	15%
Contexto	2	15%
Modo de operacionalização	2	15%

Em primeiro lugar, oito alunos (62%) identificam que uma das caraterísticas do feedback escrito que mais os ajudou foi este ter sido fornecido periodicamente, fazendo referência a dois aspetos principais. Por um lado, argumentam que isto contribuía para a consolidação do seu trabalho: "O que mais me ajudou foi a periodicidade com que os [comentários escritos] recebi pois, assim, tinha sempre um apoio que não deixava os erros evoluir" (Sara). Por outro lado, referem que o facto de o feedback escrito ser periódico contribuía para a sua utilidade na oportunidade de melhoria do trabalho realizado: "O que mais me ajudou foi o facto de os feedbacks serem entregues de forma tão rápida, o que fazia com que não nos esquecêssemos do nosso raciocínio" (Marta).

Em segundo lugar, sete alunos (54%) identificam que uma das caraterísticas que mais contribuiu para a utilidade do feedback escrito na sua aprendizagem foi o próprio conteúdo, fazendo referência a dois aspetos principais. Por um lado, quatro alunos (31%) defendem que o feedback escrito contemplava indicações que contribuíam não só para identificar os erros, mas também para compreender as razões pelas quais os cometiam. Isto é visível na resposta de um dos alunos: “O que mais me ajudou também foi o facto de ter a oportunidade de perceber os erros e compreender como posso corrigi-los” (Sofia). Por outro lado, seis alunos (46%) defendem que o feedback escrito dava indicações que ajudavam a desenvolver ou melhorar o processo de resolução utilizado: “[Os comentários escritos] ajudaram-me a melhorar a forma como apresento as minhas respostas e a perceber que pode haver formas diferentes de resolver certas perguntas” (Bento).

Em terceiro lugar, quatro alunos (31%) identificam que uma das caraterísticas que mais contribuiu foi o facto de o feedback escrito não corrigir o trabalho realizado. Os alunos argumentam que as indicações não eram dadas de forma direta, fazendo com que voltassem a pensar sobre a questão para chegar de forma autónoma às respostas de que precisavam. Este aspeto é visível na resposta dada por um dos alunos: “[O que mais me ajudou] Foi a forma como estavam escritos porque não estavam óbvios, o que me fez sempre pensar por mim” (Vasco).

Verifica-se que dois alunos (15%) referem que o feedback escrito os ajudou na sua aprendizagem por ter sido dado nas diferentes perguntas das tarefas e não apenas através de um único comentário global a todo o trabalho realizado. Este aspeto é visível na resposta dada por um dos alunos:

> O que mais me ajudou foi o facto de os comentários estarem focados em cada um dos exercícios e não no trabalho em geral, porque me deu mais oportunidades de melhorar o meu trabalho (Sofia).

Para dois alunos (15%), a forma dos comentários escritos contribuiu para a sua aprendizagem. Ainda que não apresente uma justificação, um aluno (8%) refere que: “[O que mais me ajudou] Foi a forma como estavam escritos, de forma clara e com uma boa caligrafia” (Alberto). O outro aluno (8%) refere que o facto de os comentários serem escritos permite que o contributo na aprendizagem seja prolongado: “Os comentários escritos acabam por ser melhores porque a qualquer altura podemos rever os comentários e, quando os relemos, melhorar o nosso trabalho” (Marta).

Dois alunos (15%) identificam o contexto como um aspeto útil do feedback escrito. Um dos alunos refere que os comentários escritos foram mais úteis para as tarefas realizadas em grupo:

> Os comentários que mais me ajudaram foram os que foram feitos nas tarefas que fizemos em aula, visto que é mais nesses problemas que posso aprender a melhorar como apresento e desenvolvo as minhas respostas (Bento).

O outro aluno aponta que o feedback escrito ajudou principalmente no trabalho desenvolvido a partir das tarefas individuais, mas não apresenta uma justificação: "O feedback que nos foi dado foi útil, principalmente nos trabalhos de casa" (Marta).

Por fim, dois alunos (15%) fazem referência ao modo de operacionalização do feedback escrito. Os alunos defendem que a estratégia de ensino associada ao feedback escrito durante a intervenção letiva, que deu a oportunidade aos alunos de melhorar o trabalho e voltar a entregar, contribuiu para tornar mais evidente a melhoria do seu trabalho. Este aspeto é visível na resposta dada por um dos alunos: "A possibilidade de refazer o trabalho foi importante para que os comentários escritos fossem efetivamente úteis" (César).

Tal como já foi referido anteriormente, a partir deste questionário, é possível constatar que o feedback escrito não foi útil para dois alunos da turma.

Um dos alunos refere que os comentários escritos que recebeu não foram úteis porque não identificavam explicitamente os erros que tinha cometido e não se focaram em aspetos irrelevantes:

> Considero que o feedback não foi útil, não me ajudou a aprender. Pois a maior parte dos comentários não diziam diretamente o que estava errado, e eu acho que isso é fundamental. Também acho que os feedbacks revelam preocupações em pontos desnecessários, que não interessam em exame (Carlos).

O outro aluno defende que o feedback escrito não foi útil porque não mostra explicitamente como é que a pergunta pode ser resolvida. A sua posição é visível na resposta que dá:

> [O feedback] Não foi útil porque se eu não resolvi bem uma pergunta é porque não sabia resolver. Deste modo, um feedback que me dá sugestões não me serve para nada. Se o objetivo era que eu a seguir conseguisse resolver o que não consegui, então o melhor mesmo é explicar como se resolve (Mariana).

Verifica-se que as razões que estes dois alunos apresentam para que os comentários escritos não tenham sido úteis são aspetos que alguns dos seus colegas identificam como caraterísticas importantes nesta prática de ensino contributivas para a aprendizagem.

Para além das respostas ao questionário, o trabalho desenvolvido pelos alunos revela algumas informações relevantes para a identificação de caraterísticas potenciadoras da aprendizagem. Neste sentido, depois da análise realizada, considero que existem três aspetos relevantes a referir.

Em primeiro lugar, verifiquei que *dirigir perguntas aos alunos* nos comentários escritos contribuiu para que estes estruturassem o trabalho a desenvolver durante o tempo reservado para melhorar a produção escrita depois de receberem feedback escrito (versão 2). Este aspeto é visível, por exemplo, no trabalho desenvolvido pelo par Bernardo-Bento na resolução da primeira tarefa. Por um lado, através da Figura 45, é possível verificar que, num dos comentários escritos, o grupo sublinha as questões formuladas, sugerindo que, na perspetiva dos alunos, se trata de informação importante para o trabalho que se encontram a desenvolver:

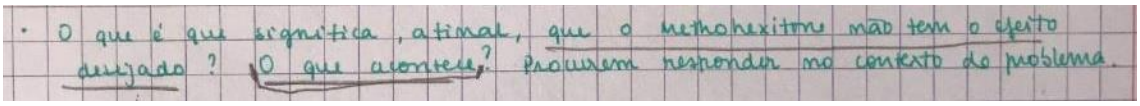

• O que é que significa, afinal, que o methohexitone não tem o efeito desejado? O que acontece? Procurem responder no contexto do problema.

Figura 45: Anotações do par Bernardo-Bento nos comentários escritos

Por outro lado, recorrendo ao registo áudio de um dos momentos de trabalho autónomo, é possível encontrar o seguinte diálogo:

> **Bernardo**: O que é que a professora escreveu na primeira?
> **Bento**: Lê lá…
> (…)
> **Bento**: Sublinha aí as perguntas. São duas, não são?
> **Bernardo**: Mas achas que só precisamos de responder às perguntas?
> **Bento**: Não é responder tipo exercício, aqui debaixo. Mas é isto que nos falta, temos de pôr estas duas coisas.

A partir do diálogo apresentado podemos compreender que a presença das duas perguntas contribuiu para que o grupo identificasse os aspetos a melhorar e definisse, de forma mais clara, aquilo que era pretendido que desenvolvessem na melhoria do seu trabalho.

Em segundo lugar, verifiquei que o facto de os comentários escritos incluírem *referências a aspetos do trabalho bem conseguidos* contribuiu para que os alunos se sentissem mais confiantes no trabalho desenvolvido e pudessem recorrer a estratégias adequadas em trabalhos posteriores. De facto, recorrendo ao registo áudio de um momento de trabalho, é possível encontrar o seguinte diálogo:

> **Bento**: O que é que a professora escreveu na a seguir?
> **Bernardo**: "Bom trabalho!" – Começamos bem!...

Bento: Para lá com isso. O que é que está a seguir?
Bernardo: [A professora] diz que a resposta está bem fundamentada por termos recorrido à definição de exponencial.
Bento: Vês? Eu disse que era melhor pôr isso e não deixar só subentendido. Esta parte mantemos agora na folha nova.
Bernardo: Exatamente igual?
Bento: A professora diz que está bem explicado, não temos de estar a alterar tudo. Mantemos.

Com este diálogo, podemos verificar que o grupo percebe que a professora reconhece a estratégia de fundamentação como adequada. Para além disso, observa-se que os alunos decidem manter na nova versão do seu trabalho os elementos que, segundo o feedback escrito, contribuem para a boa fundamentação da resposta.

Numa das aulas seguintes, durante um momento de trabalho autónomo com a tarefa 2, é possível encontrar um novo diálogo entre o mesmo par:

Bernardo: O que é para escrever a seguir?
Bento: Então, temos explicar a relação mas em vez de pôr as funções pomos o que significam.
Bernardo: Mas já está aqui a relação, isso é repetir.
Bento: Não é repetir. Lembras-te que como na outra dizia que estava bem fundamentado porque dizíamos tudo direitinho? As funções têm um significado.

Com este diálogo, percebemos que o par reteve a ideia de que fundamentar bem a sua resposta passa por explicitar os elementos que consideram no seu processo de trabalho. Neste caso, o grupo compreende que deve incluir a explicitação do significado das funções por se tratar de um elemento que contribui para fundamentar a sua resposta.

Efetivamente, na primeira versão da Tarefa 2 (Figura 46), o grupo contempla a explicitação que discute durante o momento de trabalho.

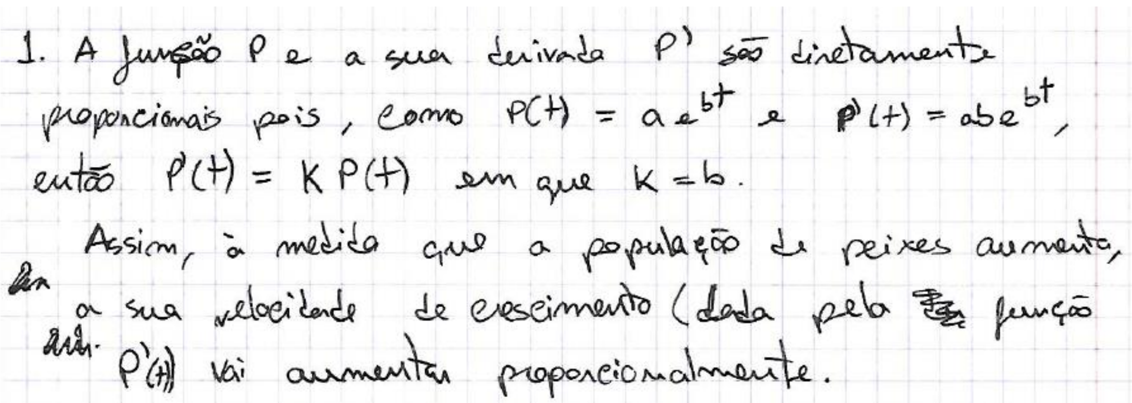

1. A função P e a sua derivada P' são diretamente proporcionais pois, como $P(t) = ae^{bt}$ e $P'(t) = abe^{bt}$, então $P(t) = K P(t)$ em que $K = b$.
Assim, à medida que a população de peixes aumenta, a sua velocidade de crescimento (dada pela função $P'(t)$ vai aumentar proporcionalmente.

Figura 46: 1ª Versão (T2) da resolução da pergunta 1 do par Bernardo-Bento

Neste sentido, os dados sugerem que esta caraterística do feedback escrito pode contribuir para a aprendizagem dos alunos.

Em terceiro lugar, verifiquei que a *forma como os comentários estão escritos* e, em particular, a escolha das palavras utilizadas parecem ter impacto na forma como os grupos acolheram esses comentários e desenvolveram ou não o seu trabalho a partir daí. Considero que este aspeto é visível no momento de trabalho do par Sara-Sofia.

Na segunda pergunta da Tarefa 1, para fazer a comparação entre os medicamentos, o grupo assume que as quantidades iniciais são iguais (Figura 47):

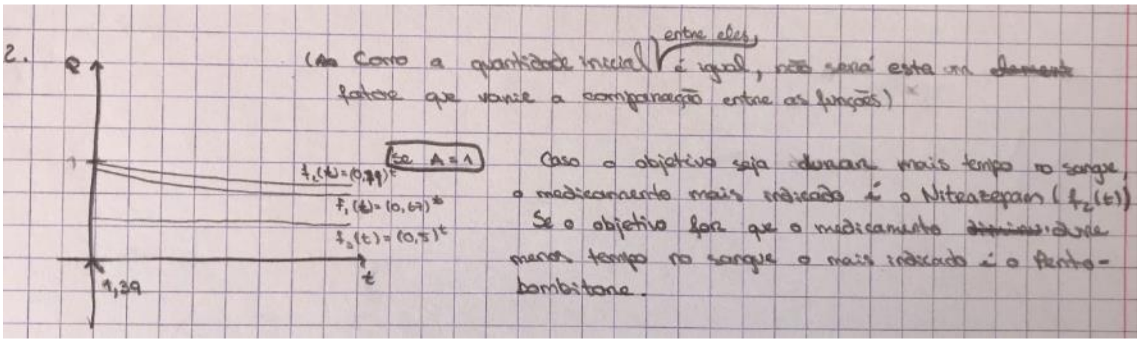


Figura 47: 1ª Versão (T1) da resolução da pergunta 2 do par Sara-Sofia

Nesta situação, o feedback escrito pretendeu sugerir ao grupo que explorassem o caso de as quantidades não serem iguais:

> *Referem que a quantidade inicial de medicamento é igual, pelo que não se trata de um fator de comparação. E se for diferente? Os medicamentos poderão ter efeitos semelhantes e ser igualmente indicados? Pode ser interessante explorar este caso.*

Na segunda versão do seu trabalho, o grupo explorou a hipótese de as quantidades de medicamento serem diferentes, tendo ilustrado o seu trabalho com uma situação particular (Figura 48).

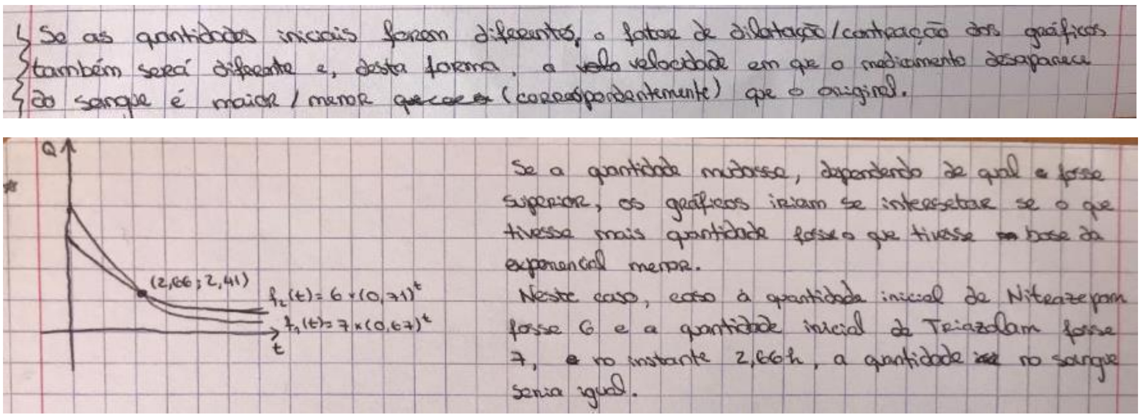


Figura 48: 2ª Versão (T1) da resolução da pergunta 2 do par Sara-Sofia

Recorrendo ao registo áudio do momento de trabalho deste grupo, é possível encontrar este diálogo:

Sofia: [A professora] também diz que podemos explorar o caso de [as quantidades] serem diferentes.
Sara: Mostra lá.
Sofia: Mas acho que não é obrigatório. Nós já apresentamos um.
Sara: Achas?
Sofia: Sim. Até diz que "podemos fazer", acho que podemos fazer se tivermos tempo no final.
Sara: Eu acho que se está escrito é porque é para mudar. E nós temos tempo, por isso…

O diálogo permite perceber que a formulação do comentário escrito parece dar a ideia de que o aspeto focado não é central no desenvolvimento do trabalho, assumindo um caráter opcional.

Estes dados sugerem que a forma como os comentários são escritos tem impacto no modo como os alunos compreendem o feedback e, a partir daí, definem quais os elementos importantes no trabalho a desenvolver.

Por fim, importa averiguar se estes três aspetos principais, que resultam da análise das produções escritas, podem estar relacionados com as perspetivas dos alunos evidenciadas nas respostas dadas aos questionários.

Questionar os alunos nos comentários escritos permite dar-lhes indicações de forma não direta, promovendo um processo de trabalho autónomo. De facto, esta forma de fornecer informação no feedback escrito foi reconhecida pelos alunos como uma caraterística útil para a sua aprendizagem.

Reconhecer e referir aspetos bem conseguidos ao longo do trabalho realizado pelos alunos é uma forma de fornecer feedback específico, que, segundo os alunos, também é importante nesta prática de ensino. Ainda assim, nenhum aluno menciona a referência a aspetos bem conseguidos como uma caraterística importante do feedback escrito fornecido. Efetivamente, relativamente ao seu conteúdo, os alunos reconhecem utilidade ao feedback escrito por este contribuir para a correção e melhoria de aspetos menos conseguidos.

Relativamente à forma como os comentários são escritos, os alunos mencionam apenas o facto de esta não ser direta, não referindo escolha das palavras utilizadas e não mostrando preferência por um estilo mais "diretivo" sobre um estilo mais "sugestivo". Ainda assim, importa notar de que se trata de um aspeto relativo à perceção que os alunos fazem dos comentários, atribuindo um caráter facultativo ou não à necessidade de melhorar o trabalho, pelo que se compreende que não esteja contemplada nas caraterísticas que suportam a utilidade do feedback escrito. De facto, não reconhecendo a necessidade de melhorar o trabalho, os alunos poderão não considerar estes comentários como possíveis contributos para a sua aprendizagem.

CAPÍTULO 6
CONCLUSÕES

Neste capítulo, começo por realizar uma breve síntese do estudo e, a partir da análise dos dados recolhidos, apresento os principais resultados obtidos, procurando responder às questões formuladas para o trabalho de cariz investigativo. Por fim, faço uma reflexão global sobre o trabalho desenvolvido.

Síntese do Estudo

O trabalho desenvolvido no presente documento pretendeu estudar o contributo do feedback escrito para a aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas numa turma de 12.º ano de escolaridade. Mais especificamente, procurei perceber qual é a importância que os alunos atribuem ao feedback escrito, qual é a eficácia do feedback escrito no trabalho que os alunos desenvolvem e que caraterísticas do feedback escrito se revelam mais potenciadoras das aprendizagens dos alunos. A intervenção letiva foi realizada no Colégio Pedro Arrupe, numa turma com treze alunos. A proposta pedagógica incidiu sobre o tópico de modelos exponenciais da unidade de funções exponenciais e logarítmicas.

Relativamente à metodologia, optei por um paradigma interpretativo. A recolha dos dados foi feita através da observação direta, acompanhada de notas de campo e do registo áudio das minhas intervenções e das de alguns grupos de trabalho, da recolha documental, contemplando as versões antes e depois do feedback escrito ser dado e os próprios comentários escritos, e da realização de dois questionários, que foram aplicados no início e no final da intervenção letiva.

A análise de dados recorreu à análise do conteúdo. A partir das respostas ao primeiro questionário, foi possível perceber a importância que os alunos atribuem ao feedback escrito, conhecendo a sua experiência com esta prática e a utilidade que lhe atribuem. A análise das produções escritas permitiu estudar a eficácia dos comentários escritos no trabalho realizado pelos alunos, considerando a evolução entre as versões antes e depois do feedback. As respostas ao segundo questionário permitiram conhecer a utilidade que os alunos atribuíram ao feedback escrito depois da intervenção letiva. Por fim, identifiquei as caraterísticas do feedback escrito potenciadoras da aprendizagem dos alunos através da análise das suas produções escritas e das respostas ao segundo questionário.

Principais Conclusões

Importância do feedback escrito

No início da intervenção letiva foi possível verificar que todos os alunos participantes tinham conhecimento da prática do feedback escrito, sabendo identificar momentos ao longo do seu percurso escolar em que esta foi desenvolvida e caraterizar os procedimentos utilizados pelos seus professores nessas ocasiões.

Os alunos identificam três formas principais de feedback escrito. De facto, referem que esta prática de ensino foi desenvolvida através de: (i) comentários escritos nos testes de avaliação escritos; (ii) sínteses individuais no final de cada trimestre; e (iii) comentários escritos sobre trabalhos individuais que realizaram. Para além disso, os alunos apontam que receberam feedback escrito no âmbito das disciplinas de Português, Matemática Filosofia, Inglês, Geografia, Geometria Descritiva, História e Física e Química.

É ainda possível afirmar que maioria dos alunos considera esta prática de ensino útil para a sua aprendizagem. Antes da intervenção letiva, os alunos começam por defender que o feedback escrito é útil porque lhes dá orientações sobre *para onde vão* e *quais os próximos passos* (Hattie & Timperley, 2007). De facto, estas orientações são úteis uma vez que contribuem para que o aluno trabalhe para reduzir a diferença entre o seu nível de desempenho e aquele que é esperado que tenha (Ramaprasad, 1983). Para além disso, os alunos reconhecem que os comentários escritos permitem identificar os erros cometidos e as razões pelas quais foram cometidos. Efetivamente, o feedback pode ter maior utilidade quando incide sobre erros específicos e estimula a sua correção (Bruno e Santos, 2010).

Por fim, os alunos realçam dois aspetos. Por um lado, e apontando a importância da interação desencadeada pelo feedback (Santos & Pinto, 2018), mostram que a sua utilidade também está relacionada com a possibilidade de conhecer a perceção do professor sobre o seu trabalho. Por outro lado, realçam que o feedback escrito permite que haja um registo da informação fornecida, de modo a que seja considerada posteriormente. De facto, os alunos valorizam a possibilidade de as indicações fornecidas serem utilizadas em trabalhos posteriores (Nicol, 2011; Price, Handley, Millar & O'Donovan, 2010).

Os alunos que defendem que o fornecimento de feedback não é uma prática útil, apontam dois argumentos principais. Em primeiro lugar, referem que os comentários escritos, como "Bom trabalho!" ou "Continua assim!", nem sempre contêm informação importante sobre o seu desempenho. Este tipo de comentários, *dirigidos à pessoa, ao self*, não promove um maior compromisso e empenho face aos objetivos de aprendizagens e consequente trabalho a desenvolver (Hattie & Timperley, 2007). Em segundo lugar, o aluno com mais dificuldades na turma refere que, muitas vezes, não chega a perceber o que os comentários dizem, preferindo que o professor o faça de forma oral. Este aspeto pode estar relacionado com o nível de desempenho do aluno, que é uma dimensão importante a considerar no feedback escrito (Santos & Pinto, 2018). Neste sentido, estes autores alertam para a dificuldade que alunos com um desempenho fraco revelam em compreender feedback que contemple ideias ou conceitos matemáticos abstratos.

Depois da intervenção letiva, os alunos mantiveram a sua posição acerca da utilidade do feedback escrito para a sua aprendizagem. Verificou-se que os alunos referem que o feedback escrito é útil não só porque contribui para a identificação e correção dos erros, mas também para o desenvolvimento e melhoria das respostas. Isto parece sugerir que os alunos valorizam que os comentários não se resumam a um catálogo de erro (Huxham, 2007) e que se foquem nos diferentes elementos de todo o processo de trabalho e não apenas nos resultados obtidos (Nicol, 2011).

Os alunos que continuam a defender que não se trata de uma prática útil, indicam argumentos diferentes dos anteriormente por si apresentados. Por um lado, ao contrário da maioria dos seus colegas, uma aluna defende que os comentários escritos devem dar as informações necessárias de forma explícita. Esta aluna mostrou ter um processo de trabalho assente na contínua resolução de exercícios como um processo mecânico. Para além disso, desde o início do ano letivo que se observa que recorre frequentemente ao professor para esclarecer as suas dúvidas, exigindo sempre que a informação seja dada de forma explícita. Por outro lado, e contrariamente ao que foi referido acima, outro aluno refere que o feedback escrito incide sobre aspetos irrelevantes para o exame. Este aspeto ilustra a preocupação dos alunos com a prova que terão de realizar no final do ano letivo, que, para muitos, poderá contribuir para o ingresso no ensino superior.

Em síntese, todos os alunos conhecem e já tiveram contacto com o feedback escrito no seu percurso escolar. Para além disso, a maioria dos alunos reconhece a utilidade e importância desta prática de ensino para a sua aprendizagem, sabendo apresentar razões pelas quais isso acontece.

Eficácia do feedback escrito

De forma geral, os alunos apresentam melhorias no seu trabalho depois de receberem feedback escrito.

Para além disso, verificou-se que, na maioria das situações em que os alunos alteraram o seu trabalho, apresentam melhorias. Existem apenas dois casos em que os alunos alteram o seu trabalho, mas não o melhoram. Isto pode ser explicado por duas ordens de razões. Em primeiro lugar, trata-se de uma turma com um bom nível de desempenho à disciplina e com o hábito de se envolver de forma empenhada nas propostas feitas em sala de aula. Este envolvimento também pode ser explicado pela boa relação que estabeleci com os alunos desde o início do ano letivo (Santos & Pinto, 2018). Em segundo lugar, tratando-se de uma turma de pequena dimensão, foram formados apenas 6 grupos de trabalho. Isto permitiu-me fazer um acompanhamento próximo ao trabalho realizado pelos alunos, fornecendo feedback oral. Os alunos tiveram oportunidade de esclarecer as dúvidas sobre os comentários escritos e, frequentemente, viram o feedback escrito ser complementado com o feedback oral. De facto, o feedback oral é dinâmico, podendo ser constantemente ajustado e desenvolvido, o que pode promover o progresso esperado depois do feedback escrito (Santos & Pinto, 2009).

Observaram-se melhorias em cinco situações principais: (i) completude das resoluções; (ii) explicitação do significado dos resultados no contexto do problema; (iii) fundamentação das respostas; (iv) correção de elementos do processo; e (v) enriquecimento do trabalho já desenvolvido.

Através das produções escritas dos alunos, foi possível estudar o contributo do feedback escrito nos diferentes tipos de situações. O Quadro 12 apresenta um resumo geral dos comentários fornecidos ao trabalho que os alunos desenvolveram a partir das cinco tarefas propostas durante a intervenção letiva e a evolução verificada entre a primeira e segunda versão.

Quadro 12: Comentários fornecidos em todas as tarefas e seus efeitos

Tipo		Comentários	Verificaram-se melhorias?	
			Sim	Não
A	Incompletude	59	39	20
B	Contexto do Problema	32	23	9
C	Fundamentação	41	27	14
D	Correção	36	27	9
E	Enriquecimento	17	10	7

A partir do Quadro 12, observa-se que foram fornecidos mais comentários do tipo A (59), de *incompletude*. Neste tipo de produções escritas, verificou-se que os alunos não apresentaram resposta a todos os elementos pedidos. Recorrendo às notas de campo e ao registo áudio, é possível constatar que a larga maioria dos grupos de trabalho não conseguiu terminar as tarefas propostas durante o primeiro momento de trabalho autónomo. Este aspeto pode ter contribuído para que os grupos apresentassem resoluções incompletas, às quais fosse pertinente dar feedback escrito. Também se verificou que, no segundo momento de trabalho autónomo, os alunos referiram não ter tido tempo para melhorar todos os aspetos contemplados no feedback escrito. No tempo dado, os alunos poderão ter privilegiado melhorar outros aspetos do seu trabalho, como as situações das suas produções escritas de tipo B, de *contexto de problema*, ou de tipo D, de *correção*, que apresentaram maiores evoluções positivas. Estes aspetos podem explicar o número de trabalhos (20) que, ainda assim, não apresentaram melhorias depois do feedback escrito. Efetivamente, em 2010, Bruno e Santos verificaram que o número de aspetos contemplados nos comentários tem impacto no desempenho dos alunos. Na verdade, quando foram considerados mais de dois aspetos, a evolução dos alunos não foi a esperada.

As produções escritas de tipo C, de *fundamentação*, ficaram em segundo lugar no número de comentários escritos fornecidos (41). Ao longo do ano letivo, a turma trabalhou maioritariamente com exercícios e a partir das propostas do manual adotado. Nestas tarefas, não era exigido um nível de fundamentação muito elaborado, pelo que os alunos não estavam muito habituados a desenvolver as suas resoluções nesse sentido. Por isso, os alunos poderão ter tido dificuldades em compreender o nível de fundamentação pedido e, consequentemente, em apresentar as suas respostas devidamente fundamentadas. Para além disso, a argumentação matemática apresenta uma maior exigência cognitiva e "que coloca sérias dificuldades aos alunos" (Boavida, 2005, p.5).

Estes aspetos podem ter contribuído para que houvesse um maior número de situações deste tipo e a que fosse oportuno fornecer feedback escrito.

Relativamente à evolução positiva que se observou entre as duas versões de trabalho, existem dois tipos de produções escritas que se destacam. Em primeiro lugar, verificou-se que os alunos melhoraram mais frequentemente (75%) o seu trabalho em situações do tipo D, de *correção*. Este aspeto pode ser explicado pelos motivos pelos quais os alunos consideram o feedback escrito útil. Antes da intervenção letiva, os alunos apontavam que esta prática lhes era útil porque permitia identificar e corrigir os erros e compreender as razões pelas quais foram cometidos. De facto, ainda que deva ter um equilíbrio entre aspetos positivos e negativos, o feedback escrito tende a ser eficaz quando contempla indicações sobre os erros cometidos (Nicol, 2011).

Em segundo lugar, verificou-se que os alunos apresentaram melhorias frequentemente (72%) em situações do tipo B, de *contexto do problema*. De forma geral, neste tipo de situações os alunos já apresentam corretamente os elementos necessários para a resolução das questões na primeira versão do trabalho. Recorrendo ao registo áudio, e dado o bom nível de desempenho da turma, verifica-se que os alunos não apresentam grandes dificuldades em compreender o feedback escrito fornecido e explicitar o significado pretendido. Os dados sugerem que os alunos têm facilidade em reconhecer a aplicabilidade neste tipo de situações. De facto, o feedback escrito tende a ser mais eficaz neste tipo de situações (Price, Handley, Millar & O'Donovan, 2010), o que parece explicar porque é que os alunos melhoram frequentemente o seu trabalho nas situações deste tipo.

Por fim, importa notar que as produções escritas de tipo E, de *enriquecimento*, receberam o menor número de comentários escritos (17). Para além disso, observa-se que os alunos melhoraram o seu trabalho menos frequentemente nestas situações (59%). O número de comentários escritos pode ser explicado pelo facto de esta ser uma situação que se verifica apenas quando os alunos já apresentam uma resposta correta, completa e fundamentada. Neste sentido, é compreensível que tenha sido fornecido menos feedback escrito a situações deste tipo do que às restantes por existirem em menor número. A evolução positiva observada pode ser explicada pelo facto de a maioria dos alunos não ter terminado as tarefas no tempo estipulado para o primeiro momento de trabalho autónomo. Neste sentido, e uma vez que o trabalho de enriquecimento é desenvolvido quando já existe uma resolução bem elaborada, os alunos poderão ter optado por utilizar o tempo para melhorar o seu trabalho noutros aspetos ou mesmo para trabalhar nas questões deixadas por responder.

Em síntese, observou-se que a maioria dos alunos apresenta uma evolução positiva nas suas produções escritas depois de receber feedback escrito. Os alunos utilizam os comentários escritos para completar as resoluções, explicitar o seu significado no contexto do problema, fundamentar, corrigir e enriquecer as respostas.

Caraterísticas potenciadoras da aprendizagem

Nas respostas ao segundo questionário, verificou-se que 11 alunos (85%) defendem que o feedback escrito foi útil. Nesse sentido, identificam algumas das caraterísticas principais pelas quais isso acontece: periodicidade, conteúdo, não corrigir, especificidade, forma, contexto e modo de operacionalização.

Fornecer feedback escrito de forma periódica permite que os alunos recebam orientação regularmente e que isso aconteça quando ainda têm presente o trabalho realizado. Esta dimensão temporal contribui para que os comentários escritos possam ser efetivamente úteis para a aprendizagem dos alunos (Nicol, 2011). Relativamente à dimensão temporal, os alunos apontam o modo de operacionalização como uma forma de apresentar melhorias no trabalho a desenvolver, e não apenas no seguinte. É possível afirmar que uma das maiores razões que justificam a ineficácia do feedback é a falta de oportunidades para que seja efetivamente útil (Huxham, 2007).

Para os alunos, o conteúdo dos comentários escritos é a segunda caraterística mais importante. De facto, este aspeto tem uma grande influência na forma como os alunos compreendem e utilizam o feedback escrito (Brookhart, 2007). Brookhart (2007) refere ainda que os comentários devem ser específicos e relativos a aspetos concretos do trabalho dos alunos, mas que não devem fazer o processo por eles. Dar a oportunidade de ser o próprio aluno a identificar o erro pode "permitir que aconteça uma aprendizagem mais duradoura ao longo do tempo" (Santos, 2003, p. 19). Isto parece explicar a importância que os alunos também atribuem ao facto de o feedback escrito ser específico, mas não corrigir explicitamente os seus erros.

O contexto também é referido, mas não se verificou um consenso sobre o tipo de tarefas em que o feedback escrito pode ser mais útil. De facto, tanto as tarefas individuais como as tarefas em grupo foram referidas. Por um lado, isto pode ser explicado pelos diferentes métodos de trabalho a que os alunos estão habituados. Existem alunos que preferem trabalhar de forma individual e outros em grupo, pelo que isso poderá afetar o trabalho que desenvolvem nesses contextos e, consequentemente, a forma como acolhem e utilizam os comentários escritos. Por outro lado, os grupos de trabalho funcionaram de forma diferente. De acordo com as notas de campo, é possível constatar que alguns grupos tiveram mais dificuldades em trabalhar colaborativamente, o que pode ter influenciado o trabalho desenvolvido a partir do feedback escrito recebido.

A forma escrita desta prática foi apontada como um aspeto útil para a aprendizagem dos alunos. É essencial que os comentários escritos sejam legíveis (Bruno & Santos, 2010), o que parece explicar o facto de os alunos também apontarem a caligrafia como um aspeto importante. Ainda assim, recorrendo ao registo áudio, é possível constatar que o feedback oral foi um importante contributo para o trabalho desenvolvido. As minhas intervenções durante as aulas permitiram clarificar e complementar os comentários escritos.

A partir da análise das produções escritas, foi possível identificar outros três aspetos importantes para a aprendizagem dos alunos. Questionar parece contribuir para que os alunos definam os aspetos a melhorar. Isto pode ser explicado pelo facto de as questões incluírem pistas para ação futura dos alunos, para além de os incentivarem a analisar o seu trabalho (Santos & Pinto, 2018) e a refletir sobre este (Tunstall & Gipps, 1996). A referência a aspetos bem conseguidos parece promover a utilização desses elementos em tarefas posteriores. Para além disso, pode ainda desenvolver a confiança no trabalho desenvolvido (Santos & Pinto, 2018). Por fim, a escolha das palavras parece ter impacto na importância e prioridade que os alunos atribuem aos diferentes aspetos a melhorar no seu trabalho. Deste modo, a escolha das palavras deve ser bem ponderada, o que contribui para que a composição do feedback escrito seja uma atividade muito exigente (Brookhart, 2007).

Em síntese, as caraterísticas potenciadoras do feedback escrito identificadas foram: *periodicidade*; *conteúdo*; *não corrigir*; *especificidade*; *forma*; *contexto*; *modo de operacionalização*; *questionar*; *referência a aspetos bem conseguidos*; e *escolha das palavras*.

Reflexão Final

Para concluir, importa realizar um balanço reflexivo sobre o trabalho desenvolvido, em particular, sobre a experiência de lecionação da subunidade didática, contemplando as aprendizagens realizadas e as dificuldades que senti. Esta experiência contribuiu de forma significativa para a minha formação enquanto futura professora.

Em primeiro lugar, tomei consciência de que o conhecimento que o professor tem da sua turma é um aspeto fundamental na preparação do trabalho a desenvolver com os alunos. Para isso, foi importante ter a oportunidade de acompanhar o meu professor cooperante desde o início do ano letivo e contar com a sua disponibilidade para me explicar como desenvolve o seu processo de ensino. Assim, pude perceber como utiliza o conhecimento que tem dos seus alunos no trabalho que desenvolve e como isso torna as aulas em momentos de aprendizagem significativos. Independentemente da unidade didática abordada, conhecer os alunos, o seu processo de trabalho e as suas dificuldades permite considerar propostas e estratégias adequadas aos diferentes alunos.

Procurei ter estes cuidados na preparação da intervenção letiva, em particular no feedback escrito e oral que forneci. Tendo em conta os objetivos deste trabalho, torna-se importante refletir sobre a experiência de dar feedback escrito. Durante a intervenção letiva, foi exigente desenvolver esta prática de forma tão assídua. Por um lado, e ainda que se tratasse de uma turma de pequena dimensão, fornecer comentários específicos a todos os grupos ou alunos foi uma atividade que despendeu muito tempo. Por outro lado, esse trabalho permitiu-me acompanhar de forma atenta o trabalho que os alunos desenvolveram em cada uma das aulas.

Colocar-me na posição do aluno foi o maior desafio que enfrentei no desenvolvimento desta prática. Ainda que o conhecimento dos alunos tenha sido útil, pude constatar que é muito difícil prever como o aluno vai acolher os comentários que lhe são dirigidos. Sabendo que a reação do aluno tem influência na forma como este trabalha a partir do feedback fornecido, é um aspeto muito importante a considerar. Na verdade, pude verificar que o mesmo feedback pode não ser útil a alunos diferentes.

No início da intervenção letiva, tendo em conta as caraterísticas da turma, esperava que a maioria dos alunos soubesse acolher e utilizar os comentários escritos. De facto, foi isso que acabou por acontecer. Ainda assim, os alunos surpreenderam-me na forma clara como apresentaram razões pelas quais esta prática lhes tinha sido útil, não sendo algo a que estivessem habituados. Tendo uma nova oportunidade, consideraria uma intervenção letiva mais prolongada. Desta forma, teria mais tempo para conhecer como os alunos acolhem os comentários e, assim, aperfeiçoar a forma como redijo os comentários.

Tratou-se de uma experiência muito útil para a atividade que realizarei enquanto professora. De facto, o feedback escrito é uma prática de ensino que pode ser desenvolvida em diferentes anos de escolaridade e na abordagem de diversos tópicos. Tinha escolhido esta temática para a elaboração do relatório porque era uma prática de ensino que me interessava. Depois desta experiência, verifico que o interesse se mantém porque sinto que, ainda que fornecer comentários escritos seja uma tarefa muito exigente para um professor, é uma prática que pode efetivamente contribuir para a aprendizagem do aluno. Para além disso, e ainda que sinta que tenha de continuar a aprender, tomei consciência de que é uma prática que é possível concretizar em sala de aula, ainda que seja necessário fazer adaptações a diferentes contextos.

Importa, ainda, referir dois aspetos relativos à preparação e concretização das aulas desta intervenção letiva. Considerando a preparação das aulas, a escolha das tarefas é um aspeto essencial e a abordagem exploratória teve um contributo importante para as aulas lecionadas. Neste caso, tendo optado propositadamente pelo trabalho no âmbito de um contexto real, as tarefas permitiram que os alunos compreendessem melhor a aplicabilidade da matemática. Por exemplo, com a primeira tarefa, os alunos compreenderam, ainda que de forma simples, a relação que pode existir entre a matemática e a indústria farmacêutica, reconhecendo utilidade no trabalho desenvolvido. Considero que o feedback escrito fornecido também contribuiu para este aspeto. De facto, os comentários escritos e a oportunidade dada aos alunos de melhorarem o seu trabalho promoveram uma exploração mais aprofundada das tarefas propostas e, consequentemente, uma maior compreensão dos contextos abordados.

Relativamente à concretização das aulas, senti dificuldades na gestão do tempo entre os diferentes momentos. Já abordei este aspeto nas reflexões sobre as aulas que lecionei no âmbito da unidade curricular de Iniciação à Prática Profissional III. Ainda que sinta que tenha progredido ao longo das aulas e desde o primeiro semestre, considero que ainda tenho dificuldades na passagem entre os diferentes momentos planeados, em particular na conclusão dos momentos de trabalho autónomo e início de um momento de discussão com toda a turma. Informando os alunos sobre o tempo que dispõem para trabalhar de forma autónoma, torna-se fundamental cumprir os tempos estipulados não só para promover que os alunos giram de forma responsável o seu trabalho, mas também para que valorizem aquilo que o professor diz, vendo como a aula se desenvolve de acordo com as informações dadas.

Considero que o facto de ter realizado a minha intervenção letiva no 12.º ano de escolaridade também trouxe alguns desafios. Todos os alunos da turma tencionam ingressar no ensino superior, pelo que este ano assumiu um caráter particularmente importante para atingir os seus objetivos. De facto, observei que o exame a realizar no final do ano foi uma preocupação constante para os alunos, bem como as classificações obtidas, que, depois da entrega de cada teste, foram sempre gerando a tentativa de previsão da classificação interna final da disciplina. Nesse sentido, e a partir da observação que fiz do trabalho do meu professor cooperante, considero que o professor tem um papel importante na motivação dos alunos. Num ano em que os alunos tendem a focar-se nas classificações obtidas, cabe ao professor acompanhar o processo que desenvolvem e motivar para que este se traduza em aprendizagem significativa e não apenas em trabalho de preparação para o exame.

Em suma, foi um verdadeiro privilégio poder acompanhar uma turma de dimensão reduzida com um bom ambiente de trabalho. Pude constatar a importância de conhecer bem os alunos para aspetos como a preparação das suas aulas, a gestão em sala de aula ou o desenvolvimento de práticas como o feedback escrito. Acima de tudo, pude confirmar que o papel de um professor vai para além destes aspetos. De facto, é fundamental saber motivar e acompanhar os alunos no trabalho que realizam para atingir os objetivos que definem para o seu futuro. Relativamente a este último aspeto, senti-me particularmente privilegiada por poder acompanhar o processo que os alunos desta turma fizeram na superação das suas dificuldades para a construção dos seus planos para o seu futuro, que em breve conhecerá uma nova etapa.

REFERÊNCIAS

Ames, C. (1992). Classrooms: Goals, structures, and student motivation. *Journal of educational psychology*, *84*(3), 261-271.

APM (1988). *A renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

Bacaër, N. (2011). *A short history of mathematical population dynamics*. Springer Science & Business Media.

Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education, 5(1)*, 7-74.

Boavida, A. M. (2005). *A argumentação em Matemática: investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração* (Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa).

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Brookhart, S. M. (2007). Feedback that fits. *Educational Leadership, 65(4)*, 54-59.

Bruno, I., & Santos, L. (2010). Written comments as a form of feedback. *Studies in Educational Evaluation, 36,* 111-120.

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em educação matemática – Práticas de ensino da Matemática* (pp. 255-266). Lisboa: SPIEM.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Colégio Pedro Arrupe. (2017). *Projeto Educativo do Colégio Pedro Arrupe - uma carta de marear para o século XXI*.

Cross, K. (1996) Improving teaching and learning through classroom assessment and classroom research. In G. Gibbs (Ed.), *Improving student learning: using research to improve student learning* (pp. 3-10). Oxford: Oxford Centre for Staff Development.

Dias, S., & Santos, L. (2009) Feedback in different mathematics tasks. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & C. Sakonidis (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 409-416). Thessaloniki, Greece: PME.

Gipps, C. (1999). Socio-cultural aspects of assessment. *Review of research in education, 24*(1), 355-392.

Gipps, C. (2003). As relações avaliativas. *Educação e Matemática, 74,* 86-89.

Guerreiro, M., & Portugal, M. (2006). O Trabalho Cooperativo nas Aulas de Matemática, numa Turma do 5º Ano: uma experiência curricular. In M. Moreno, M. J. González & P. Bolea (Coords.), *Actas del X Simposio de la SEIEM*. Huesca: SEIEM.
Disponível em:
http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas10SEIEM/Com11GuerreiroSalinas.pdf

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research, 77(1),* 81-112.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (1997). *Making Sense: Teaching and Learning Mathematics with Understanding*. Portsmouth, N.H.: Heinemann.

Huxham, M. (2007). Fast and effective feedback: are model answers the answer?. *Assessment & Evaluation in Higher Education, 32(6),* 601-611.

IEUL (2016). *Carta Ética para a Investigação em Educação e Formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa*. Diário da República, 2.ª série - N.º 52 - 15 de março de 2016. Disponível em http://www.ie.ulisboa.pt/investigacao/comissao-de-etica

Kluger, A. N., & DeNisi, A. (1996). The effects of feedback interventions on performance: A historical review, a meta-analysis, and a preliminary feedback intervention theory. *Psychological bulletin*, *119*(2), 254.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (1994). *Investigação qualitativa: fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

MEC. (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática A do Ensino Secundário*. Lisboa: MEC.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: IIE e APM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1995). *Assessment Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Va.: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, Va.: NCTM.

Negra, C., Martinho, E., & Martins, H. (2017). *Dimensões 12 – Matemática A de 12.º ano de escolaridade*. Lisboa: Santillana.

Nicol, D. (2011). Good designs for written feedback to students. *McKeachie's teaching tips: Strategies, research and theory for college and university teachers*, 108-124.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e aprendizagem da Matemática. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas profissionais de professores de Matemática* (pp. 13-27). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.
Disponível em: http://www.ie.ulisboa.pt/publicacoes/ebooks/praticas-profissionais-dos-professores-de-matematica

Price, M., Handley, K., Millar, J., & O'Donovan, B. (2010). Feedback: all that effort, but what is the effect?. *Assessment & Evaluation in Higher Education, 35(3)*, 277-289.

Quinton, S., & Smallbone, T. (2010). Feeding forward: using feedback to promote student reflection and learning – a teaching model. *Innovations in Education and Teaching International*, *47*(1), 125-135.

Ramaprasad, A. (1983). On the definition of feedback. *Systems Research and Behavioral Science*, *28*(1), 4-13.

Sadler, D. R. (2010). Beyond feedback: developing student capability in complex appraisal. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, *35*(5), 535-550.

Santos, L. (2003). Avaliar competências: uma tarefa impossível? *Educação e Matemática, 74*, 16-21.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes, L. Santos, H. Gomes, & C. Rodrigues (Orgs.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 11-35). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Santos, L. (2016). A articulação entre a avaliação somativa e a formativa, na prática pedagógica: uma impossibilidade ou um desafio?. *Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação, 24*(92), 1-33.

Santos, L., & Cai, J. (2016). Curriculum and Assessment. In À. Gutiérrez, G. C. Leder & P. Boero (Eds), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 153-185). Rotterdam: Sense Publishers.

Santos, L., & Dias, S. (2006). Como entendem os alunos o que lhes dizem os professores? A complexidade do feedback. *Profmat2006* (CD-ROM). Lisboa: APM.

Santos, L., & Pinto, J. (2009). Lights and Shadows of Feedback in Mathematics Learning. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & C. Sakonidis (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 5, pp. 49-56). Thessaloniki, Greece: PME.

Santos, L., & Pinto, J. (2010). The Use of Feedback in Written Reports and Portfolio: an Assessment for Learning Strategy. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education, 14*(3), 281-297.

Santos, L., & Pinto, J. (2018). Ensino de conteúdos escolares: A avaliação como Fator estruturante. In F. Veiga (Coord.), *O Ensino como fator de envolvimento numa escola para todos* (pp. 503-539). Lisboa: Climepsi Editores.

Semana, S., & Santos, L. (2009). Estratégias de avaliação na regulação das aprendizagens em matemática. *XIX SIEM* (CD-ROM). Viana do Castelo: APM.

Segers, M., Dochy, F., & Cascallar, E. (2003). The era of assessment engineering. In M. Segers, F. Dochy & E. Cascallar (Eds.), *Optimising new modes of assessment: in search of qualities and standards* (pp. 1-12). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Silver, E. A., & Smith, M. S. (2015). Integrating Powerful Practices: Formative Assessment and Cognitively Demanding Mathematics Tasks. In C. Suurtamm, & A. R. McDuffie (Eds.), *Annual perspectives in mathematics education: Assessment to enhance teaching and learning* (pp. 5-14). Reston, Va.: NCTM.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M., & Silver, E. A. (2009). *Implementing Standards-Based Mathematics Instruction: A Casebook for Professional Development*. New York: Teachers College Press.

Stiggins, R. J. (2002). Assessment Crisis: The Absense Of Assessment FOR Learning. *Phi Delta Kappan, 83(10),* 758-765.

Swan, M. (2014). Designing tasks and lessons that develop conceptual understanding, strategic competence and critical awareness. *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática 2014* (pp. 7-26). Setúbal: SPIEM.

Rebimbas, C., Rebimbas, R., & Neto, T. B. (2014). As funções exponencial e logarítmica nos manuais escolares do 12. º ano. In M. H. Martinho, R. A. Tomás Ferreira, A. M. Boavida, & L. Menezes (Eds.), *Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 47-63). Braga: APM.

Taras, M. (2002). Using assessment for learning and learning from assessment. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, *27*(6), 501-510.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. M. (2006). *Funções – Matemática 12.º ano de escolaridade*. Lisboa: ME.

Tunstall, P., & Gipps, C. (1996). Teacher feedback to young children in formative assessment: A typology. *British educational research journal*, *22*(4), 389-404.

Ugwa, K. A., & Agwu, A. (2012). Mathematical Modeling as a Tool for Sustainable Development in Nigeria. *International Journal of Academic Research in Progressive Education and Development*, *1*(2), 251-258.

Wiliam, D. (2007). *What Does Research Say the Benefits of Formative Assessment Are?*. (NCTM Research Briefs and Clips).
Disponível em:
https://www.nctm.org/uploadedFiles/Research_and_Advocacy/research_brief_and_clips/Research_brief_05_-_Formative_Assessment.pdf

Wiliam, D., & Thompson, M. (2007). Integrating Assessment with Learning: What Will Take to Make It Work?. In C. A. Dwyer (Ed.), *The Future of Assessment: Shaping Teaching and Learning* (pp. 53-82). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

ANEXOS

Anexo 1: Tarefa 1

COLÉGIO PEDRO ARRUPE

MATEMÁTICA A | 12º ANO
TAREFA 1

PARA UM SONO DE BELEZA

Há pessoas que, por razões de natureza física ou psíquica, têm dificuldade em dormir. Os médicos dispõem de uma vasta gama de medicamentos que podem receitar nestes casos. Uma propriedade importante que se requer a estes medicamentos é que o seu efeito desapareça antes da manhã seguinte de forma a que quem o toma possa retomar a sua atividade normal sem estar sonolento. Na tabela seguinte encontram os dados referentes a 4 medicamentos:

NOME	FÓRMULA
Triazolam	$Q(t) = A\,(0{,}67)^t$
Nitrazepam	$Q(t) = A\,(0{,}71)^t$
Pentobombitone	$Q(t) = A\,(0{,}5)^t$
Methohexitone	$Q(t) = A\,(1{,}15)^t$

A: dose inicial (mg/l); **Q**: quantidade de medicamento no sangue no tempo t (mg/l);

t: tempo em horas desde que o medicamento chegou ao sangue

1. Só três destes medicamentos proporcionam o efeito desejado.

Qual deles não o faz? O que aconteceria se, por engano, alguém tomasse esse produto?

Justifiquem devidamente a vossa resposta.

2. Numa situação de dificuldade em adormecer, qual dos medicamentos apresentados vos parece mais indicado?

Justifiquem devidamente a vossa resposta.

3. Considerem que existe um paciente com dificuldade em adormecer que perde a receita do médico com as indicações da medicação e decide tomar, de hora a hora, uma dose de 4mg de Pentobombitone.

Qual é o efeito esperado? Justifiquem devidamente a vossa resposta.

Adaptado de Teixeira, P. (Coord.) (2006). Matemática 12º ano - Funções. Lisboa: MEC.

Anexo 2: Tarefa 2

COLÉGIO PEDRO ARRUPE

MATEMÁTICA A | 12º ANO
TAREFA 2

NEM TUDO O QUE VEM À REDE É PEIXE

As funções exponenciais (com diferentes bases) são frequentemente utilizadas na construção de diferentes modelos teóricos de crescimento. Considera uma população de peixes, cuja evolução pode ser aproximadamente descrita por um modelo exponencial de base e, através da função P, em função do tempo t $(t > 0)$, dado em anos:

$$P(t) = ae^{bt}, \qquad a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}$$

1. Que relação existe entre a função P e a sua derivada, P' ?

Procurem descrever o seu significado no contexto da situação acima descrita.

2. Na tabela que se segue, está representada a evolução da quantidade (em toneladas) de sardinhas pescadas por uma empresa de pesca, desde o início da sua atividade:

ANO	QUANTIDADE PESCADA (TONELADAS)
1	2
2	5
3	8
4	12
5	20

Considerem a função S, que, a cada ano, t $(t \in \mathbb{R}_0^+)$, faz corresponder a quantidade de sardinhas pescada, em toneladas, pela empresa.

2.1. Recorrendo à potencialidade de regressão exponencial da calculadora gráfica, construam um modelo que melhor se ajuste aos valores apresentados na tabela e esbocem a sua representação gráfica.

Considerem três casas decimais nos resultados que apresentarem.

2.2. De acordo com o modelo que construíram, que previsão podem fazer sobre a quantidade de sardinhas pescada pela empresa nos anos seguintes?

2.3. Sabem, agora, que nos 6º e 7º anos de atividade da empresa foram pescadas, respetivamente, 25 e 28 toneladas de sardinha.

2.3.1. Tomando conhecimento dos novos dados, consideram que o modelo exponencial que construíram continua a ser adequado? Porquê?

2.3.2. O modelo logístico também é dos modelos teóricos utilizados para descrever certos fenómenos, podendo descrever a evolução de uma população P como:

$$P(t) = \frac{c}{1 + de^{-kt}}, \qquad k, c, d \in \mathbb{R}^+$$

Recorrendo à potencialidade de regressão logística da calculadora gráfica, construam um novo modelo, que se ajuste melhor ao novo conjunto de dados, e esbocem a sua representação gráfica.

Considerem três casas decimais nos resultados que apresentares.

2.3.3. De acordo com o novo modelo que construíram, que previsão podem fazer sobre a quantidade de sardinhas pescada pela empresa nos anos seguintes?

2.3.4. Analisando o modelo logístico que construíste, que conclusões podem tirar acerca da atividade da empresa a longo prazo? Como é justificam essas conclusões no contexto do problema?

Anexo 3: Tarefa 3

COLÉGIO PEDRO ARRUPE	MATEMÁTICA A | 12º ANO
	TAREFA 3

NEWTON E O CAFÉ

Quando um objeto arrefece num meio onde a temperatura é constante, a evolução da sua temperatura obedece à lei de arrefecimento de Newton. Esta lei sugere que, nestas condições, *a taxa de variação da temperatura de um objeto é proporcional à diferença entre a temperatura do meio envolvente e a temperatura do objeto*.

1. Determinem uma expressão geral que, de acordo com Newton, descreva a evolução da temperatura de um objeto, T, quando, a uma determinada temperatura inicial, T_0, é colocado num meio onde a temperatura ambiente, T_a, é constante.

2. Considerem agora que, numa pastelaria em que a temperatura ambiente é constante, um empregado serve um café a um cliente, deixando-o em cima do balcão, a arrefecer. Sabe-se que a evolução da temperatura do café $\boldsymbol{T}$ (em ^{0} C) em função do tempo $\boldsymbol{t}$ (em minutos) é dada pela expressão:

$$T(t) = 20 + 60e^{-0{,}11t}, \qquad t > 0$$

2.1. A que temperatura o café é entregue ao cliente?

2.2. Se o cliente quiser beber o seu café a metade da temperatura inicial, quanto tempo é que tem de esperar?

Apresenta o resultado aproximado aos segundos.

2.3. "A taxa de variação da temperatura do café é constante."

Concordam com esta afirmação? Justifica.

2.4. O que acontece se deixarmos o café arrefecer por tempo indeterminado?

Fundamentem a vossa resposta no contexto do problema apresentado.

Adaptado de Teixeira, P. (Coord.) (2006). Matemática 12º ano - Funções. Lisboa: MEC.

Anexo 4: Exercícios selecionados para TPC

1

Considere a função definida por:

$$f(x) = 100e^{5x}$$

1.1 Mostre que $f(x)$ e $f'(x)$ são diretamente proporcionais, indicando a constante de proporcionalidade.

1.2 Calcule:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{hf(x)}$$

2

Considere, fixados os valores reais a e b, a função definida por:

$$f(x) = ae^{bx}$$

Determine os valores de a e b, se:

a) $f(0) = 2$ e $f(2) = 8$

b) $f(2) = 1$ e $f(x+3) = \frac{1}{2} f(x)$

3

O césio 137 sofre decomposição radioativa de acordo com a lei de decaimento radioativo

$$Q(t) = ce^{-0,023t}$$

com o tempo medido em anos.

Determine o tempo necessário para que a quantidade de césio seja reduzida a metade.

4

Admita que o carbono-14 sofre decaimento radioativo de acordo com a fórmula

$$Q(t) = Q_o\, e^{-0,00012t}$$

com t medido em anos.

4.1 Uma amostra vegetal descoberta numa gruta pré-histórica contém apenas $20\ \%$ do carbono-14 esperado em plantas vivas.

Qual é a idade aproximada da amostra?

4.2 Qual é a quantidade de carbono-14 existente numa amostra de origem vegetal datada de aproximadamente 16 000 anos?

5

Uma população de bactérias evolui em função do tempo (em horas) de acordo com o modelo malthusiano:

5.1 Admitindo que numa contagem inicial existem aproximadamente 5000 bactérias e, numa segunda contagem, passadas 4 horas, existem cerca de

1 **a)** os parâmetros N_0 e k;

b) a quantidade aproximada de bactérias previstas numa contagem intermédia, duas horas após

5.2 Se apenas se souber que o número de bactérias duplica ao fim de duas horas, que parâmetro é possível determinar: N_0 ou k?

6

Uma cultura de bactérias triplica a cada hora.

Sabe-se que, no instante inicial ($t = 0$), estão presentes 10^6 bactérias.

6.1 Justifique que o número de bactérias $N(t)$ é aproximado em cada instante t medido em horas por:

$$N(T) = 10^6 \, e^{1{,}1t}$$

necessário para que a cultura atinja as 10^8 bactérias?

Apresente o resultado aproximado ao minuto.

6.3 Qual é a taxa de crescimento instantânea da população ao fim de uma hora?

7

Durante um certo período, o número de ursos numa reserva natural é dado por $P(t)$, em que t é o tempo, em anos, decorrido a partir

A função P verifica

$$P'(t) = \frac{1}{125} P(t)(100 - \mathrm{P}(t))$$

7.1 Mostre que a função dada pela expressão

$$P(t) = \frac{100}{1 + Ae^{-\frac{4}{5}t}}, A \in \mathbb{R}$$

satisfaz a equação diferencial.

7.2 Calcule o valor da constante A em função da população inicial $P(0) = P_0$.

7.3 Qual é a evolução da população se $P_0 = 100$? Interprete o resultado obtido.

Caderno de Apoio do 12.º ano

9

A um indivíduo é ministrada uma injeção de 250 mg de antibiótico no instante $t = 0$.

Suponha que a quantidade de antibiótico, em miligramas, presente no sangue após t horas, verifica

$$f(t) = 250e^{-0{,}7t}$$

9.1 Qual é a taxa de decréscimo inicial de f, isto é, $f'(0)$?

9.2 Ao fim de quanto tempo é o antibiótico injetado reduzido a 10 % da quantidade inicial?

Apresente o resultado em horas, arredondado às décimas.

15

Uma massa de $m_0 = 50$ gramas de rádio 226 existente numa amostra, no instante $t_0 = 0$, desintegra-se ao longo do tempo. Em todo o instante t, a taxa de variação instantânea da massa, $m'(t)$, é proporcional à massa $m(t)$ existente nesse instante. Sabendo que, ao fim de 1 ano, a massa de rádio é igual a $m(1) = 49{,}975$ gramas, calcule o tempo necessário à desintegração de metade da massa inicial. Apresente o resultado em anos, arredondado à unidade.

Anexo 5: Plano da Aula 1

ANO DE ESCOLARIDADE | 12º Ano

TURMA | 12º A_2

DATA | 22 de Fevereiro de 2018 [12h00]

DURAÇÃO | 60 minutos

SUMÁRIO

- Realização do Questionário 1
- Resolução da Tarefa

TÓPICOS

DOMÍNIO 5 | Unidade 14: Modelos Exponenciais

ENQUADRAMENTO CURRICULAR [METAS]

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Modelos exponenciais

5. Estudar modelos de crescimento e decrescimento exponencial

1. Saber que a evolução de determinadas grandezas, como a massa de uma substância radioativa, a temperatura de alguns sistemas ou o número de indivíduos de certas populações, pode ser modelada por uma «equação diferencial de 1.ª ordem» da forma $f' = kf$, que traduz o facto de, em cada instante, a taxa de variação ser aproximadamente proporcional à quantidade de grandeza presente.
2. Justificar, dado um número real k, que as funções $f(x) = ce^{kx}$, onde c é uma constante real, são soluções em $\mathbb{R}$ da equação diferencial $f' = kf$ e que todas as soluções desta equação são dessa forma, mostrando que dada uma qualquer solução f, tem derivada nula a função $e^{-kx}f(x)$.

6. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo juros compostos.
2. +Resolver problemas envolvendo as propriedades algébricas das funções exponenciais e logarítmicas.
3. +Resolver problemas envolvendo o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais e logarítmicas, a determinação dos respetivos intervalos de monotonia bem como os extremos relativos e absolutos e a existência de assíntotas ao respetivo gráfico.
4. +Resolver problemas envolvendo a modelação de sistemas por equações da forma $y' = ky, k \in \mathbb{R}$.

OBJETIVOS DA AULA

No final da aula, o aluno deverá ser capaz de:

- Resolver problemas que envolvem o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais;
- Resolver problemas recorrendo à calculadora gráfica

MODO DE TRABALHO DOS ALUNOS

- Trabalho autónomo em grupos (pares e trio)

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

- Definição da Função Exponencial
- Propriedades da Função Exponencial
- Derivada da Função Exponencial

RECURSOS

- Quadro
- Computador
- Projetor
- Calculadora Gráfica
- Enunciado da Tarefa

MOMENTOS DA AULA

MOMENTO	**TEMPO** [Minutos]
1. Entrada dos alunos + Sumário	10
2. Realização do Questionário 1	15
3. Apresentação da Tarefa	5
4. Trabalho Autónomo	25
5. Conclusão da Aula + TPC	5

DESENVOLVIMENTO DA AULA

1. ENTRADA DOS ALUNOS

A sala já estará organizada para o momento de trabalho a pares, de forma a facilitar a entrada dos alunos e o início do momento de trabalho autónomo. Para além disso, na aula anterior será explicado, de forma sucinta, aquilo que irá acontecer ao longo da intervenção.

Para que os alunos tomem conhecimento daquilo que irá acontecer ao longo da aula, o sumário já estará escrito no quadro, de forma a que os alunos o possam passar para os cadernos para, depois, dar início à aula planeada.

2. REALIZAÇÃO DO QUESTIONÁRIO 1

A professora irá distribuir o enunciado e os alunos começarão por responder ao primeiro questionário, de forma individual.

3. APRESENTAÇÃO DA TAREFA

A professora começará por apresentar brevemente a tarefa, informando os alunos do tempo que dispõem para a sua resolução. Para além disso, a professora explicará que, no final do tempo estipulado, os alunos devem entregar uma produção escrita por grupo numa das folhas entregues, reforçando a importância de os alunos justificarem devidamente todas as respostas e conclusões que obtiverem. Estas informações visam promover que os grupos de trabalho se organizem e giram o seu tempo de trabalho de forma autónoma.

4. TRABALHO AUTÓNOMO

Para a resolução desta tarefa, a calculadora gráfica assume um papel muito importante. De facto, a representação gráfica das funções apresentadas pode contribuir para a melhor compreensão das perguntas postas e para o desenvolvimento da argumentação nas respostas. Desta forma, nas aulas relativas às unidades anteriores deste domínio, verificou-se que os alunos têm a autonomia necessária com este instrumento, procurando garantir que saberão servir-se das suas potencialidades no trabalho desenvolvido.

PERGUNTA 1

ATIVIDADE DO ALUNO	ATIVIDADE DA PROFESSORA
Os alunos deverão compreender que, para responder ao pedido, terão de analisar o efeito de cada um dos medicamentos e verificar se estes podem ser receitados num caso de dificuldade em adormecer. Para isso, devem retirar do enunciado as condições exigidas a um medicamento deste tipo e verificar se estas são respeitadas pelos quatro medicamentos apresentados.	Os alunos poderão ter dificuldades em retirar do enunciado os dados de que precisam para compreender o que precisam de analisar os diferentes medicamentos. Nesse caso, a professora deverá pedir que releiam o enunciado e, em seguida, colocar questões como: • O que é dito sobre um medicamento a utilizar numa situação de dificuldade em adormecer? • Que efeito é esperado num medicamento deste tipo?
Estratégia A: Alguns alunos poderão recorrer à representação gráfica das funções e à sua análise. Assim, poderão ter uma perceção do efeito de cada um dos medicamentos apresentados na tabela. A partir do efeito de cada medicamento, que pode ser compreendido a partir da quantidade de medicamento no sangue ao longo do tempo, os alunos poderão comparar com aquilo que é esperado relativamente a um medicamento a receitar em situações deste tipo. Os alunos poderão apresentar representações gráficas considerando diferentes doses iniciais, verificando a variação obtida. São apresentadas algumas possibilidades em anexo. [Ver Anexo A]	Os alunos poderão ter dificuldades em compreender como podem analisar as funções dadas, quando não são fornecidos todos os valores dos parâmetros. Nesse caso, a professora deverá sugerir que os alunos possam começar a fazer o seu estudo a partir de diferentes casos, verificando a variação observada e se é possível obter alguma conclusão a nível geral. Para isso, poderá colocar questões como: • Existe alguma semelhança nos gráficos dos diferentes casos? • É possível compreender o impacto da dose inicial no efeito do medicamento ao longo do tempo?
Assim, poderão concluir que, independentemente da dose inicial, apenas a quantidade de *Methohexitone* no sangue cresce ao longo do tempo. No contexto do problema, isto significa que o efeito de sonolência não só se prolongaria por tempo indeterminado, como se iria acentuar, contrariando o efeito desejado neste tipo de situações.	Os alunos poderão ter dificuldade em justificar a identificação do medicamento "indesejado" uma vez que as suas conclusões se baseiam na análise de diferentes casos particulares. Nesse caso, a professora poderá sugerir uma das outras estratégias (apresentadas mais à frente) para complementarem as suas respostas, questionando-os: • A partir das propriedades destas funções haverá outra forma de tirar as conclusões de que precisam sem recorrer à representação gráfica?

<table>
<tr>
<td>

Estratégia B:
Alguns alunos poderão recorrer às propriedades algébricas da função exponencial para responder ao que é pedido. Para isso, poderão analisar a variação da quantidade de medicamento no sangue numa hora, determinando $Q(t+1)-Q(t)$ para cada um dos medicamentos apresentados.

Para o Triazolam:

$Q(t+1)-Q(t)=A(0{,}67)^{t+1}-A(0{,}67)^{t}=$
$=A\times 0{,}67\times(0{,}67)^{t}-A(0{,}67)^{t}=$
$=A(0{,}67)^{t}\times(0{,}67-1)$
$=-0{,}23\times A(0{,}67)^{t}<0$
justificando que
$A>0$ de acordo com o seu significado no contexto apresentado e $(0{,}67)^{t}>0$ porque se trata de uma função exponencial.

Mostrando a variação de Triazolam numa hora é sempre negativa, os alunos poderão concluir que a quantidade deste medicamento no sangue decresce ao longo do tempo, verificando-se o efeito de diminuição da sonolência proporcionado por um medicamento deste tipo.

Para o Nitrazepam:

$Q(t+1)-Q(t)=A(0{,}71)^{t+1}-A(0{,}71)^{t}=$
$=A\times 0{,}71\times(0{,}71)^{t}-A(0{,}71)^{t}=$
$=A(0{,}71)^{t}\times(0{,}71-1)$
$=-0{,}28\times A(0{,}71)^{t}<0$

</td>
<td>

- Que propriedades conhecem da função exponencial?

Depois de perceberem que a resposta pode passar pelo estudo variação da quantidade de medicamento no sangue, os alunos poderão ter dificuldades em encontrar uma forma de o fazer. Assim, recorrendo ao conhecimento que possuem do estudo de sucessões a professora poderá colocar algumas questões orientadoras como:

- Se é pretendido que o efeito de sonolência diminua ao longo do tempo, o que é esperado que aconteça à variação da quantidade de medicamento no sangue?
- Como é que eu posso traduzir a variação da quantidade de medicamento no sangue entre dois instantes numa expressão?

Para além disso, prevê-se que as dificuldades associadas ao cálculo desta variação sejam poucas. No caso de estas surgirem, e uma vez que se encontram relacionadas com propriedades bem conhecidas pelos alunos, a professora deverá remeter essas dúvidas para os outros elementos do grupo.

</td>
</tr>
</table>

justificando que $A > 0$ de acordo com o seu significado no contexto apresentado e $(0{,}97)^t > 0$ porque se trata de uma função exponencial. Mostrando a variação de Nitrazepam numa hora é sempre negativa, os alunos poderão concluir que a quantidade deste medicamento no sangue decresce ao longo do tempo, verificando-se o efeito de diminuição da sonolência proporcionado por um medicamento deste tipo. Para o Pentobombitone: $Q(t+1) - Q(t) = A(0{,}5)^{t+1} - A(0{,}5)^t =$ $= A \times 0{,}5 \times (0{,}5)^t - A(0{,}5)^t =$ $= A(0{,}5)^t \times (0{,}5 - 1)$ $= -0{,}5 \times A(0{,}5)^t < 0$ justificando que $A > 0$ de acordo com o seu significado no contexto apresentado e $(0{,}5)^t > 0$ porque se trata de uma função exponencial. Mostrando a variação de Pentobombitone numa hora é sempre negativa, os alunos poderão concluir que a quantidade deste medicamento no sangue decresce ao longo do tempo, verificando-se o efeito de diminuição da sonolência proporcionado por um medicamento deste tipo. Para o Methohexitone: $Q(t+1) - Q(t) = A(1{,}15)^{t+1} - A(1{,}15)^t$ $= A \times 1{,}15 \times (1{,}15)^t - A(1{,}15)^t =$ $= A(1{,}15)^t \times (1{,}15 - 1)$ $= 0{,}15 \times A(1{,}15)^t > 0$ justificando que $A > 0$ de acordo com o seu significado no contexto apresentado e $(1{,}15)^t > 0$ porque se trata de uma função exponencial. Mostrando a variação de Methohexitone numa hora é sempre positiva, os alunos poderão concluir que a quantidade deste medicamento no sangue cresce ao longo do tempo, não se verificando, por isso, o efeito de diminuição da sonolência proporcionado por um medicamento deste tipo.	

Deste modo, os alunos chegariam de forma bem fundamentada à conclusão de que Methohexitone é o medicamento que não produz o efeito desejado. Assim, os alunos poderão concluir que, no caso de, por engano, esse produto ser tomado, o efeito de sonolência não só se prolongaria ao longo do tempo como se iria acentuar, contribuindo para que a pessoa não acordasse. **Estratégia C:** Alguns alunos poderão recorrer às propriedades algébricas da função exponencial para responder ao que é pedido. Neste sentido, poderão determinar a razão entre as quantidades de medicamento no sangue nos instantes $t+1$ e t. A partir do conhecimento que possuem das sucessões, poderão perceber se essa razão é maior ou menor que 1 e, assim, concluir se a quantidade de medicamento no sangue cresce ou decresce. Para o Triazolam: $$\frac{Q(t+1)}{Q(t)}=\frac{A(0{,}67)^{t+1}}{A(0{,}67)^{t}} =\frac{A\times 0{,}67\times(0{,}67)^{t}}{A(0{,}67)^{t}}=0{,}67<1$$ Mostrando que a razão entre as quantidades apresentadas é menor que 1, os alunos poderão provar que, ao longo do tempo t, a quantidade de Triazolam no sangue diminui, pelo que este medicamento provoca o efeito desejado. Para o Nitrazepam: $$\frac{Q(t+1)}{Q(t)}=\frac{A(0{,}71)^{t+1}}{A(071)^{t}} =\frac{A\times 0{,}71\times(0{,}71)^{t}}{A(0{,}71)^{t}}=0{,}71<1$$ Mostrando que a razão entre as quantidades apresentadas é menor que 1, os alunos poderão provar que, ao longo do tempo t, a quantidade de Nitrazepam no sangue diminui, pelo que este medicamento provoca o efeito desejado.	Recordando o conhecimento que possuem das duas sucessões e, em particular, das progressões geométricas, os alunos poderão optar por esta estratégia, mas apresentar dificuldades em utilizar este conhecimento na fundamentação da resposta pedida. Nesse caso, a professora poderá colocar algumas questões como: • Numa progressão geométrica crescente (ou decrescente), o que posso dizer da razão entre dois termos consecutivos? • Se eu quiser mostrar que a quantidade de medicamento no sangue diminui de um instante para outro, o que devo esperar da razão entre as quantidades nesses instantes?

Para o Pentobombitone: $$\frac{Q(t+1)}{Q(t)} = \frac{A(0,5)^{t+1}}{A(0,5)^{t}} = \frac{A \times 0,5 \times (0,5)^{t}}{A(0,5)^{t}} = 0,5 < 1$$ Mostrando que a razão entre as quantidades apresentadas é menor que 1, os alunos poderão provar que, ao longo do tempo t, a quantidade de Pentobombitone no sangue diminui, pelo que este medicamento provoca o efeito desejado. Para o Methohexitone: $$\frac{Q(t+1)}{Q(t)} = \frac{A(1,15)^{t+1}}{A(1,15)^{t}} = \frac{A \times 1,15 \times (1,15)^{t}}{A(1,15)^{t}} = 1,15 > 1$$ Mostrando que a razão entre as quantidades apresentadas é maior que 1, os alunos poderão provar que, ao longo do tempo t, a quantidade de Methohexitone no sangue não só não diminui, como aumenta, pelo que este medicamento não provoca o efeito desejado. Deste modo, os alunos também poderão concluir que, no caso de, por engano, este produto ser tomado, o efeito de sonolência se iria acentuar ao longo do tempo, provocando que o indivíduo em questão não acordasse.	
Estratégia D: Alguns alunos poderão, ainda, tirar conclusões a partir da definição da função exponencial e das suas propriedades. De facto, olhando para as expressões das funções que traduzem a quantidade de cada um dos medicamentos no sangue, poderão analisar a sua base e verificar o impacto que este aspeto tem na monotonia da função em questão. No caso do Triazolam, a função Q é uma função exponencial de base $0,67$, que é menor que 1, pelo que se trata de uma função decrescente. No caso do Nitrazepam, a função Q é uma função exponencial de base $0,71$, que é menor que 1, pelo que se trata de uma função decrescente.	Ao optarem por esta estratégia, prevê-se que as dificuldades apresentadas pelos alunos estejam relacionadas com a necessidade de apresentar uma resposta bem fundamentada. Nesse caso, a professora poderá sugerir que estes recorram ao manual e revejam a definição de função exponencial de forma fornecer uma resposta mais completa.

No caso do Pentobombitone, a função Q é uma função exponencial de base $0{,}5$, que é menor que 1, pelo que se trata de uma função decrescente. No caso do Methohexitone, a função Q é uma função exponencial de base $1{,}15$, que é maior que 1, pelo que se trata de uma função crescente. Ainda que esta análise permitisse apenas tirar conclusões acerca da monotonia das funções consideradas, os alunos poderiam utilizar esta estratégia para argumentar que somente a quantidade de Methohexitone no sangue é traduzida por uma função crescente, pelo que este não provoca o efeito desejado. Neste sentido, os alunos também poderão afirmar que, tratando-se de uma função crescente, o efeito de sonolência se acentuaria ao longo do tempo, levando a que o indivíduo em questão não acordasse.	

PERGUNTA 2

ATIVIDADE DO ALUNO	ATIVIDADE DA PROFESSORA
A partir dos diferentes casos estudados na pergunta anterior, os alunos poderão recorrer a diferentes variáveis como a dose inicial de medicamento e o número de horas de sono desejadas em cada situação. A partir daí, poderão construir argumentos relativamente a cada um dos medicamentos e identificar uma preferência. Pretende-se que os alunos compreendam que não existe, à partida, uma resposta certa ou errada. Mas que se espera que analisem os fatores que diferenciam os três medicamentos e analisem como estes se comportem variando os parâmetros existentes. Podem, assim, ser considerados diferentes casos, sendo apresentados algumas possibilidades em anexo. [Ver Anexo B]	Os alunos poderão ter dificuldades em escolher uma estratégia para responder ao que é pedido de forma fundamentada. Nesse caso, a professora poderá sugerir-lhes que considerem se encontram numa situação em que necessitam de tomar o medicamento: • Se tivesses de tomar o medicamento para adormece, qual seria o efeito que desejarias? • Imagina que tens dificuldade em adormecer, mas que tens de acordar cedo no dia seguinte. Qual é o efeito que desejarias que o medicamento tivesse? Alguns alunos poderão considerar apenas um caso na sua resposta, fundamentando para esse a sua preferência. Nesse caso, a professora poderá sugerir que considerem casos diferentes: • Acham que fará diferença se a pessoa tomar o medicamento durante um dia de semana ou durante o fim de semana? Porquê?

	• Nesse caso, a vossa preferência mantém-se? • Alterando a dose inicial, a preferência por um dos medicamentos altera-se?

PERGUNTA 3

ATIVIDADE DO ALUNO	ATIVIDADE DA PROFESSORA
Os alunos deverão recorrer à representação gráfica para compreender o efeito esperado na situação descrita. Pretende-se que os alunos compreendam que necessitam de construir o gráfico que traduz a quantidade de medicamento no sangue uma vez que a dose inicial é alterada de hora a hora. Pretende-se que, ainda que recorram à calculadora no trabalho desenvolvido, os alunos esbocem o gráfico da quantidade de medicamento no sangue nas condições apresentadas e, a partir daí, tirem as conclusões que considerem ser pertinentes. [Ver Anexo C]	Os alunos poderão ter dificuldades em compreender as implicações que esta forma de tomar o medicamento tem no efeito esperado. Nesse caso, a professora poderá orientar os alunos através de algumas questões orientadoras como: • De que é que depende o efeito do medicamento? • Tomando o medicamento de hora a hora, qual é a implicação que isso tem na quantidade de medicamento no sangue?

5. CONCLUSÃO E REGISTO DO TPC

Para concluir a aula, a professora deverá recolher as produções escritas, relembrando que na aula seguinte haverá um momento de trabalho destinado à melhoria das produções escritas entregues. Depois disso, também haverá oportunidade de discussão do trabalho desenvolvido nos diferentes grupos.

Para além disso, a professora informará os alunos, de forma clara, os exercícios que estes devem resolver em casa. Explicará que os exercícios devem ser resolvidos numa folha à parte e que serão recolhidos na aula seguinte.

No caso de existirem exercícios que não conseguem, de forma nenhuma, começar a resolver, os alunos deverão apontar essa indicação, podendo fazer referência à dúvida que os impediu de realizar o exercício em questão.

TPC

PÁGINA	EXERCÍCIO
61	1
62	2, 3
64	4
65	5

AVALIAÇÃO

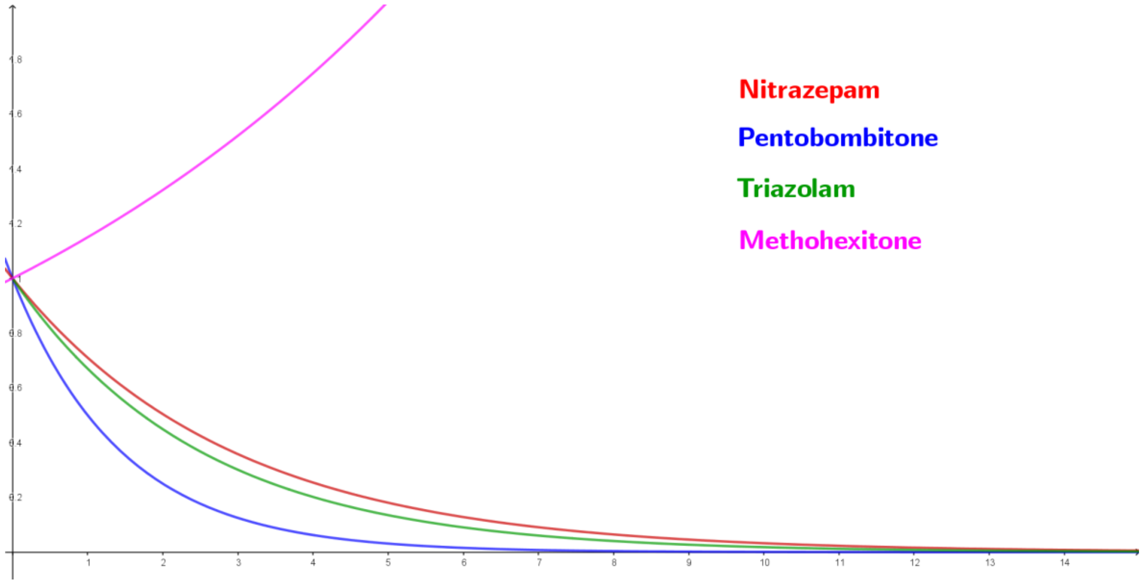
A avaliação, de caráter essencialmente regulador, será feita através da

- Observação direta do desempenho e da capacidade de comunicação dos alunos, durante o momento de trabalho autónomo;
- Apreciação das resoluções escritas dos alunos, que serão recolhidas.

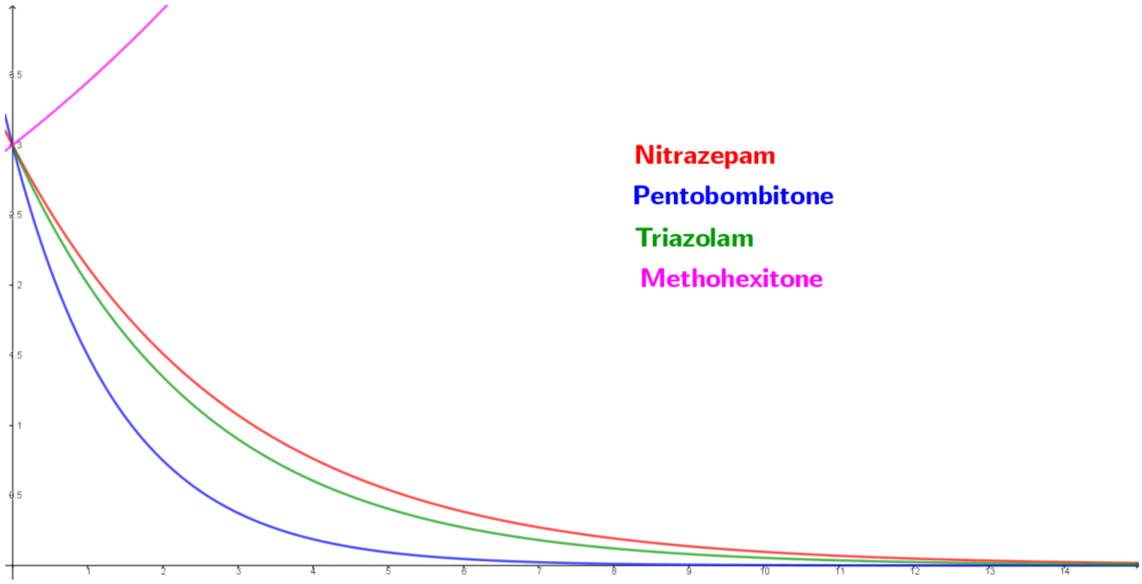
ANEXOS

ANEXO A

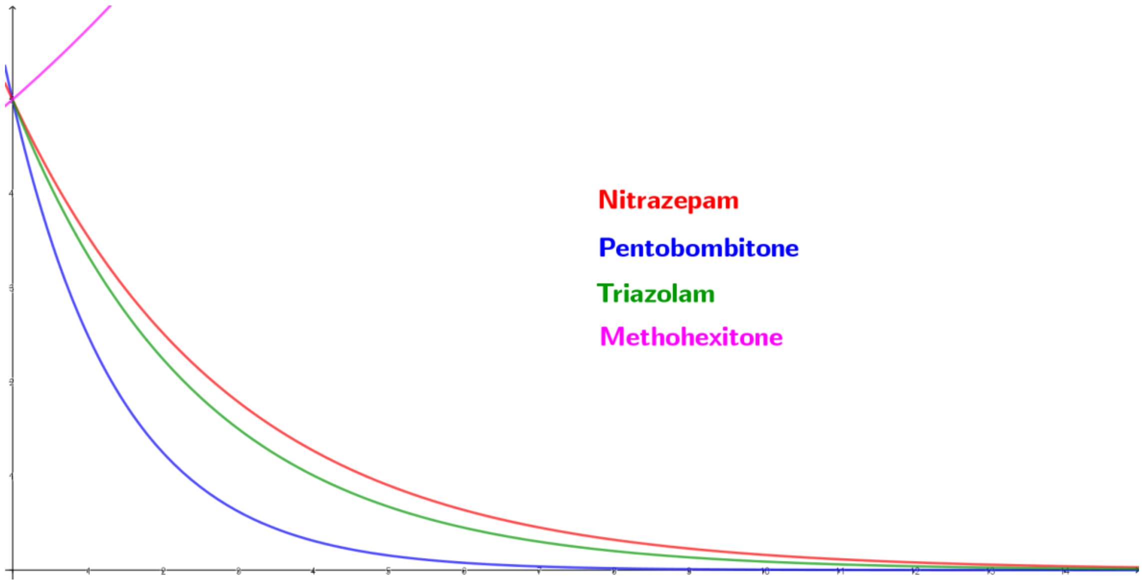
Com uma dose inicial de $1\ mg/l$, obtém-se as seguintes representações gráficas:



Com uma dose inicial de $3\ mg/l$, obtém-se as seguintes representações gráficas:

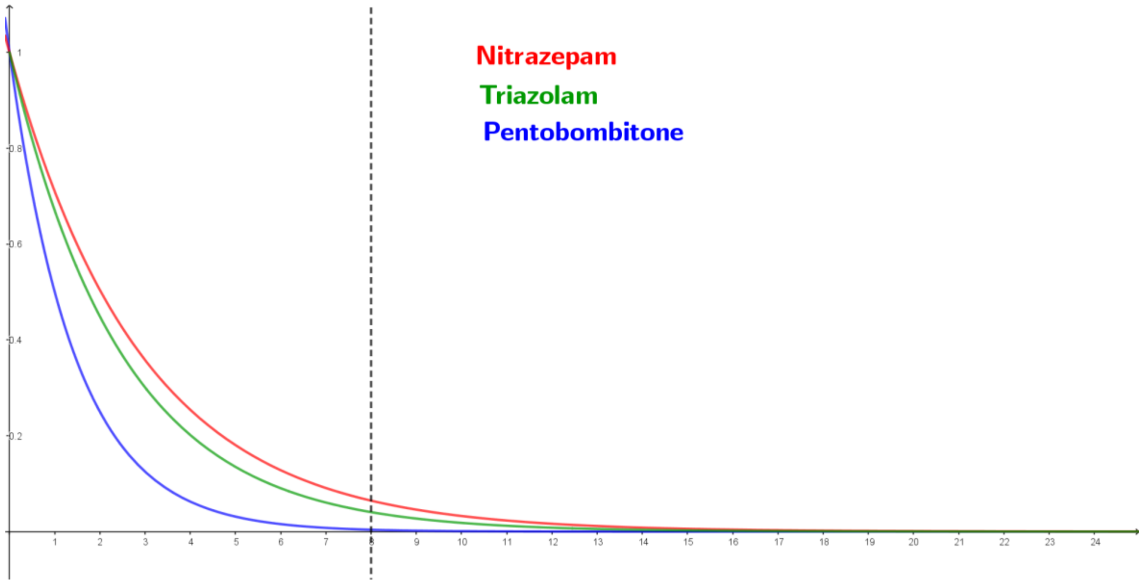


Com uma dose inicial de $5\ mg/l$, obtém-se as seguintes representações gráficas:

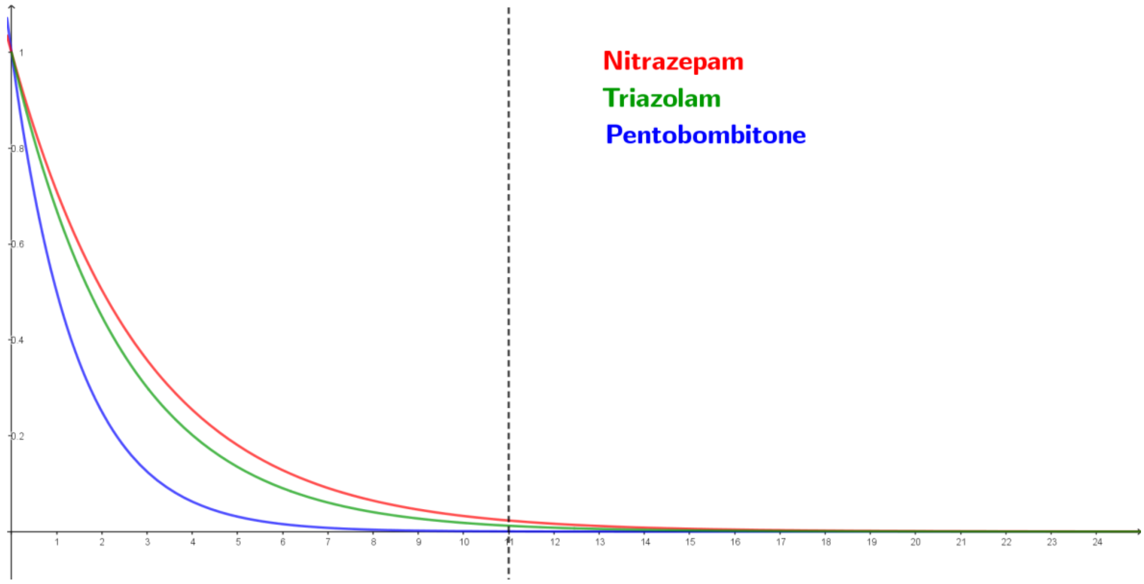


ANEXO B

Considerando que o indivíduo que toma o medicamento dorme em média 8h por noite, o medicamento a receitar deverá ser o Pentobombitone. Como se pode ver, com uma dose inicial de $1\ mg/l$, ao fim de 8 horas a quantidade deste medicamento é praticamente nula.

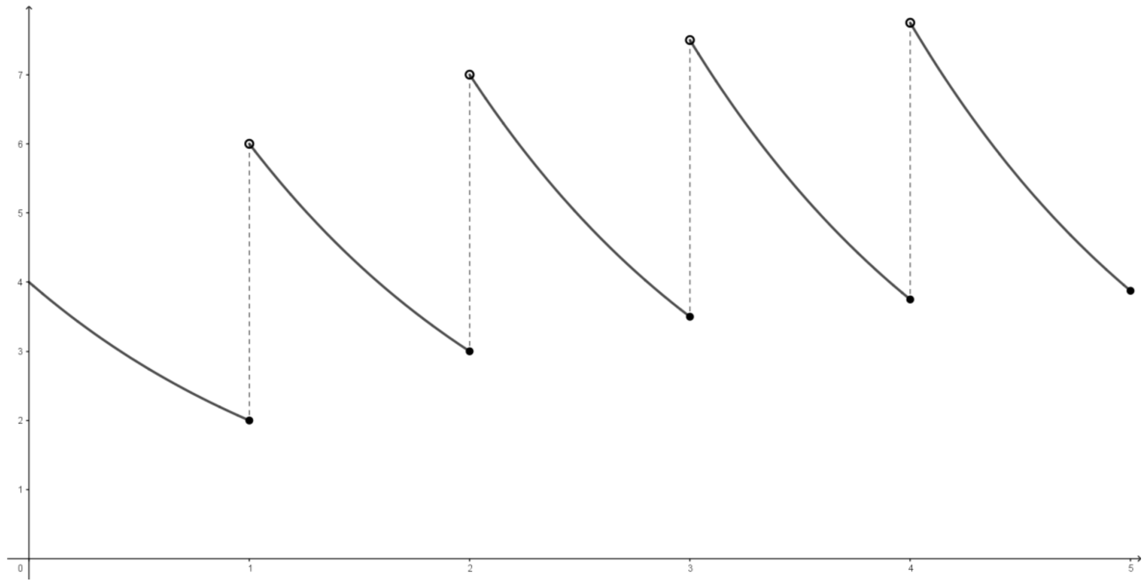


Considerando que o indivíduo que toma o medicamento dorme, em média, entre 10h e 11h por noite, o medicamento a receitar já poderá ser o Triazolam. Como se pode ver, com uma dose inicial de $1\, mg/l$, ao fim de 11h horas a quantidade deste medicamento é muito reduzida.



ANEXO C

Considerando a dose inicial de $4\, mg/l$, verifica-se que a representação gráfica que traduz a quantidade de Pentobombitone no sangue seja semelhante à da seguinte figura:



Anexo 6: Plano da Aula 2

ANO DE ESCOLARIDADE | 12º Ano

TURMA | 12º A_2

DATA | 23 de Fevereiro de 2018 [09h25]

DURAÇÃO | 60 minutos

SUMÁRIO

- Continuação da Resolução da Tarefa
- Discussão da Tarefa

TÓPICOS

DOMÍNIO 5 | Unidade 14: Modelos Exponenciais

ENQUADRAMENTO CURRICULAR [METAS]

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Modelos exponenciais

5. Estudar modelos de crescimento e decrescimento exponencial

1. Saber que a evolução de determinadas grandezas, como a massa de uma substância radioativa, a temperatura de alguns sistemas ou o número de indivíduos de certas populações, pode ser modelada por uma «equação diferencial de 1.ª ordem» da forma $f' = kf$, que traduz o facto de, em cada instante, a taxa de variação ser aproximadamente proporcional à quantidade de grandeza presente.
2. Justificar, dado um número real k, que as funções $f(x) = ce^{kx}$, onde c é uma constante real, são soluções em $\mathbb{R}$ da equação diferencial $f' = kf$ e que todas as soluções desta equação são dessa forma, mostrando que dada uma qualquer solução f, tem derivada nula a função $e^{-kx}f(x)$.

6. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo juros compostos.
2. +Resolver problemas envolvendo as propriedades algébricas das funções exponenciais e logarítmicas.
3. +Resolver problemas envolvendo o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais e logarítmicas, a determinação dos respetivos intervalos de monotonia bem como os extremos relativos e absolutos e a existência de assíntotas ao respetivo gráfico.
4. +Resolver problemas envolvendo a modelação de sistemas por equações da forma $y' = ky$, $k \in \mathbb{R}$.

OBJETIVOS DA AULA

No final da aula, o aluno deverá ser capaz de:

- Resolver problemas que envolvem o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais;
- Resolver problemas recorrendo à calculadora gráfica.

MODO DE TRABALHO DOS ALUNOS

- Trabalho autónomo em grupos (em pares e trio)
- Discussão em grupo turma

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

- Definição da Função Exponencial
- Propriedades da Função Exponencial
- Derivada da Função Exponencial

RECURSOS

- Quadro
- Computador
- Projetor
- Calculadora Gráfica
- Enunciado da Tarefa

MOMENTOS DA AULA

MOMENTO	**TEMPO** [Minutos]
1. Entrada dos alunos	5
2. Recolha dos TPC + Distribuição das Produções Escritas	5
3. Trabalho Autónomo	20
4. Discussão em Turma	25
5. Conclusão da Aula	5

DESENVOLVIMENTO DA AULA

1. ENTRADA DOS ALUNOS

A sala já estará organizada para o momento de trabalho a pares, de forma a facilitar a entrada dos alunos e o início do momento de trabalho autónomo. A professora recordará os alunos do trabalho que será desenvolvido durante esta aula, tendo em vista a melhoria das suas produções escritas.

Para que os alunos tomem conhecimento daquilo que irá acontecer ao longo da aula, o sumário já estará escrito no quadro, de forma a que os alunos o possam passar para os cadernos para, depois, dar início à aula planeada.

2. RECOLHA DOS TPC E DISTRIBUIÇÃO DAS PRODUÇÕES ESCRITAS DA TAREFA 1

A professora aproveitará a distribuição das produções escritas comentadas para recolher as resoluções dos exercícios que foram enviados para casa, evitando um momento de dispersão dentro da sala de aula.

3. TRABALHO AUTÓNOMO

No início do momento de trabalho autónomo, a professora explicará como os alunos deverão proceder à continuação da produção escrita. No final do momento de trabalho autónomo, os alunos deverão entregar uma versão melhorada da sua produção escrita, numa nova folha.

Tendo em conta as produções escritas realizadas na aula anterior, a professora pedirá aos alunos que, de futuro, deixem algumas linhas entre cada uma das alíneas propostas, de modo a que os comentários sejam dados junto à respetiva resolução.

Durante este momento, os alunos poderão ainda apresentar algumas das dificuldades previstas e registas no plano da aula anterior. Para além disso, prevê-se que os alunos possam ter algumas dificuldades em compreender e utilizar o feedback. Nesse caso, a professora complementará os comentários escritos com feedback oral.

No caso de os alunos terminarem de melhorar a tarefa antes do tempo estipulado, ser-lhes-á indicado um conjunto de exercícios de consolidação das aprendizagens realizadas ao longo de todo o domínio das funções exponenciais e logarítmicas, uma vez que terão um momento de avaliação por domínios na semana seguinte ao final da intervenção letiva.

4. DISCUSSÃO EM TURMA

A discussão irá ocorrer em turma e sob a orientação da professora, que deve promover a participação dos diferentes grupos e dos seus elementos.

Na primeira pergunta, e de acordo com a observação que fez do trabalho desenvolvido em aula e da apreciação das produções escritas realizadas na aula anterior, a professora poderá selecionar grupos que tenham optado por estratégias de resolução diferentes. Isto permitirá que a turma se aperceba de diferentes formas de resposta, reconhecendo o trabalho dos alunos e mostrando que não existe apenas uma forma de responder de forma fundamentada. Neste sentido, serão os alunos a explicar a sua estratégia aos colegas e a responder às questões que estes possam ter sobre o trabalho que desenvolveram.

Na segunda pergunta, e novamente de acordo com a observação que fez do trabalho desenvolvido em aula e da apreciação das produções escritas realizadas na aula anterior, a professora poderá questionar os alunos sobre os casos que exploraram e em que condições se basearam para definir a sua preferência relativamente aos medicamentos apresentados. A professora poderá recorrer ao Geogebra, de forma a poder observar as implicações da variação da dose inicial, se for relevante para a discussão em turma. Caso se observe que os diferentes grupos escolheram as mesmas condições, a professora poderá questionar os alunos sobre novos casos, tentando explorar mais o enunciado dado.

Na terceira pergunta, e tendo em conta que os dados eram bem definidos, prevê-se que a maioria dos grupos chegue à mesma representação gráfica e, consequentemente, às mesmas conclusões.

Consoante o tempo disponível, pode ser interessante explorar o facto de a concentração máxima nunca ultrapassar os $8\ mg/l$. Considerando a sucessão das quantidades ao fim de $1, 2, 3, \dots, n$ horas, temos que

$$q_1 = 4 \times 0{,}5$$
$$q_2 = (q_1 + 4) \times 0{,}5 = (4 \times 0{,}5 + 4) \times 0{,}5 = 4 \times (0{,}5^2 + 0{,}5)$$
$$q_3 = (q_2 + 4) \times 0{,}5 = (4 \times (0{,}5^2 + 0{,}5) + 4) \times 0{,}5 = 4 \times (0{,}5^3 + 0{,}5^2 + 0{,}5)$$
$$\dots$$
$$q_n = (q_{n-1} + 4) \times 0{,}5 = \dots = 4 \times (0{,}5^n + 0{,}5^{n-1} + \dots + 0{,}5^3 + 0{,}5^2 + 0{,}5) = 4 \times S_n$$

Sendo S_n a soma de n termos da progressão geométrica $0{,}5^n$. A partir do conhecimento prévio de sucessões, é possível saber que

$$S_n = 0{,}5^1 \times \frac{1 - 0{,}5^n}{1 - 0{,}5} = 0{,}5^1 \times \frac{1 - 0{,}5^n}{0{,}5} = 1 - 0{,}5^n$$

Determinando o limite quando n tende para infinito,

$$\lim S_n = \lim 1 - 0{,}5^n = 1 - \lim 0{,}5^n = 1 - 0 = 1$$

Pelo que, quando n tende para infinito, $q_n = 4 \times 1 = 4$

Por isso, no início de cada hora nunca será superior a $8\ mg/l$.

5. CONCLUSÃO

Para concluir a aula, a professora deverá recolher as versões melhoradas das produções escritas realizadas pelos alunos, introduzindo o trabalho que será feito na aula seguinte: melhorar produção escrita dos exercícios feitos em casa e início da resolução e uma nova tarefa. Esta informação também permitirá recordar os alunos da importância de trazerem a calculadora gráfica. Uma vez que se trata da primeira aula em que os alunos realizam este tipo de trabalho, a professora deverá garantir que não existem dúvidas e esclarecer as que surgirem.

AVALIAÇÃO

A avaliação, de caráter essencialmente regulador, será feita através da

- Observação direta do desempenho e da capacidade de comunicação dos alunos, durante os momentos de trabalho autónomo e discussão em turma;
- Apreciação das resoluções escritas dos alunos, que serão recolhidas.

Anexo 7: Plano da Aula 3

ANO DE ESCOLARIDADE | 12º Ano **TURMA |** 12º A_2

DATA | 27 de Fevereiro de 2018 [09h40] **DURAÇÃO |** 60 minutos

SUMÁRIO

- Resolução da Tarefa 2

TÓPICOS

DOMÍNIO 5 | Unidade 14: Modelos Exponenciais

ENQUADRAMENTO CURRICULAR [METAS]

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Modelos exponenciais

5. *Estudar modelos de crescimento e decrescimento exponencial*

   1. Saber que a evolução de determinadas grandezas, como a massa de uma substância radioativa, a temperatura de alguns sistemas ou o número de indivíduos de certas populações, pode ser modelada por uma «equação diferencial de 1.ª ordem» da forma $f' = kf$, que traduz o facto de, em cada instante, a taxa de variação ser aproximadamente proporcional à quantidade de grandeza presente.
   2. Justificar, dado um número real k, que as funções $f(x) = ce^{kx}$, onde c é uma constante real, são soluções em $\mathbb{R}$ da equação diferencial $f' = kf$ e que todas as soluções desta equação são dessa forma, mostrando que dada uma qualquer solução f, tem derivada nula a função $e^{-kx}f(x)$.

6. *Resolver problemas*

   1. +Resolver problemas envolvendo juros compostos.
   2. +Resolver problemas envolvendo as propriedades algébricas das funções exponenciais e logarítmicas.
   3. +Resolver problemas envolvendo o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais e logarítmicas, a determinação dos respetivos intervalos de monotonia bem como os extremos relativos e absolutos e a existência de assíntotas ao respetivo gráfico.
   4. +Resolver problemas envolvendo a modelação de sistemas por equações da forma $y' = ky, k \in \mathbb{R}$.

OBJETIVOS DA AULA

No final da aula, o aluno deverá ser capaz de:

- Compreender a relação de proporcionalidade entre uma função exponencial e a sua derivada;
- Resolver problemas que envolvem o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais;
- Resolver problemas recorrendo à calculadora gráfica (incluindo a potencialidade de regressão).

MODO DE TRABALHO DOS ALUNOS

- Trabalho em grupos (pares e trio)

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

- Definição da Função Exponencial
- Propriedades da Função Exponencial
- Derivada da Função Exponencial

RECURSOS

- Quadro
- Computador
- Projetor
- Calculadora Gráfica
- Enunciado da Tarefa

MOMENTOS DA AULA

MOMENTO	**TEMPO** [Minutos]
1. Entrada dos alunos + Sumário	10
2. Distribuição das Produções Escritas do TPC	10
3. Apresentação da Tarefa 2	5
3. Trabalho Autónomo	30
4. Conclusão da Aula	5

DESENVOLVIMENTO DA AULA

1. ENTRADA DOS ALUNOS + SUMÁRIO

A sala já estará organizada para o momento de trabalho a pares, de forma a facilitar a entrada dos alunos e o início do momento de trabalho autónomo.
Para que os alunos tomem conhecimento daquilo que irá acontecer ao longo da aula, o sumário já estará escrito no quadro, de forma a que os alunos o possam passar para os cadernos para, depois, dar início à aula planeada.

2. DISTRIBUIÇÃO DAS PRODUÇÕES ESCRITAS DO TPC

A professora distribuirá as produções escritas da resolução dos exercícios enviados para casa para que os alunos possam melhorar o trabalho realizado. Uma vez que os alunos terão de proceder a este trabalho em casa e que se trata da primeira vez que o irão fazer, a professora informará os alunos dos aspetos necessários, esclarecendo as dúvidas que surjam.

3. APRESENTAÇÃO DA TAREFA

A professora começará por apresentar brevemente a tarefa, informando os alunos do tempo que dispõem para a sua resolução. Para além disso, a professora explicará que, no final do tempo estipulado, os alunos devem entregar uma produção escrita por grupo numa das folhas entregues, reforçando a importância de os alunos justificarem devidamente todas as respostas e conclusões que obtiverem. Estas informações visam promover que os grupos de trabalho se organizem e giram o seu tempo de trabalho de forma autónoma.
Tendo em conta que esta tarefa recorre a uma potencialidade (regressão exponencial e logística) da calculadora gráfica que os alunos não dominam, a professora explicará que será projetado um vídeo no quadro iterativo com os passos necessários para a sua execução, tal como estão habituados a que aconteça neste tipo de situações.

4. TRABALHO AUTÓNOMO

Para a resolução desta tarefa, a calculadora gráfica assume um papel muito importante. De facto, tal como já foi referido, as potencialidades de regressão, que os alunos não dominam, serão necessárias para a sua resolução. Para além disso, a representação gráfica das diferentes funções consideradas poderá permitir uma melhor compreensão do contexto apresentado.

PERGUNTA 1

ATIVIDADE DO ALUNO	ATIVIDADE DA PROFESSORA
	Os alunos poderão ter dificuldades em começar a tentar responder à pergunta sem compreender que tipo de relação pode existir. Nesse caso, a professora deverá sugerir aos alunos que comecem por analisar de cada uma das funções P e P', podendo, em seguida, procurar a relação entre ambas.
Os alunos começarão por determinar a expressão de P', recorrendo ao conhecimento da derivada da exponencial. $$P'(t) = (ae^{bt})' = a \cdot b \cdot e^{bt} = abe^{bt}$$	Os alunos poderão ter dificuldade em determinar a expressão de P'. Nesse caso, depois de garantir que se trata de uma dúvida comum a todo o grupo, a professora deverá sugerir que todos os elementos possam ir ao manual e reler as páginas referentes à derivada da função exponencial, visando que os alunos se recordem do tópico já abordado em aula.
Olhando a expressão de P', os alunos poderão estabelecer a relação com P, uma vez que conhecem a sua expressão. Assim, espera-se que os alunos verifiquem que $$P'(t) = abe^{bt} = b \cdot ae^{bt} = b \cdot P(t)$$	Os alunos poderão ter dificuldade em estabelecer a ligação entre as duas funções consideradas. Nesse caso, a professora poderá sugerir-lhes que analisem as respetivas expressões, tendo em conta que é aquilo que conhecem. Poderá ainda colocar questões como: • O que é que eu conheço de P e P'? • Consigo relacionar as expressões de P e P'? Como?
A partir desta igualdade, os alunos poderão concluir que se estabelece uma relação de proporcionalidade direta entre P e P'. Para além disso, os alunos poderão ainda determinar o valor da constante k de proporcionalidade direta, sendo $$k = b$$	
Depois de tirarem as conclusões sobre a relação que se estabelece entre as duas funções, P e P', espera-se que os alunos saibam interpretar o seu significado no contexto da situação descrita.	
Tendo em conta que o enunciado refere que a função P descreve a evolução de uma população de peixes, os alunos	Alguns alunos poderão ter dificuldades em compreender aquilo que o enunciado pede. Nesse caso, a professora deverá sugerir que

poderão concluir que a relação entre P e P' permite concluir que a taxa de variação da população de peixes num determinado instante é aproximadamente proporcional à população existente nesse mesmo instante.	os alunos releiam o enunciado, colocando, depois, algumas questões orientadoras como: • O que é que a função P representa? • O que é que a função P' representa?

PERGUNTA 2.1.

ATIVIDADE DO ALUNO	ATIVIDADE DA PROFESSORA
Considerando o modelo exponencial para a quantidade de sardinhas pescada dado por $S(t) = a \cdot b^t, \qquad a, b \in \mathbb{R}^+$ A partir da calculadora gráfica, os alunos poderão determinar os valores dos parâmetros a e b, obtendo $a = 1{,}389$ $b = 1{,}730$ Em seguida, podem apresentar o modelo pedido, dado por $S(t) = 1{,}389 \cdot (1{,}730)^t$ [Ver Anexo A]	Os alunos deverão ter dificuldades na utilização da calculadora para responder devidamente ao que enunciado pede. Para além de aconselhar os alunos a tirarem informação do vídeo que passa no quadro, a professora poderá ir esclarecendo as dúvidas que surgem nos grupos.

PERGUNTA 2.2.

ATIVIDADE DO ALUNO	ATIVIDADE DA PROFESSORA
Os alunos poderão analisar o modelo obtido e tirar algumas conclusões sobre o futuro da atividade da empresa. Prevê-se que esta análise tenham um foco mais a curto prazo. Assim os alunos poderão começar por determinar os valores da quantidade de sardinhas pescada nos anos seguintes, determinando, por exemplo:	Alguns alunos poderão ter dificuldades em compreender aquilo que é pedido no enunciado. Nesse caso, a professora deverá sugerir-lhes que releiam o enunciado e analisem a resposta dada na alínea anterior. Pode, ainda, colocar questões como: • Que informações é que o modelo construído nos dá?

$S(6) = 37{,}237$ $S(7) = 64{,}420$ $S(8) = 111{,}448$ $S(9) = 192{,}805$ $S(10) = 333{,}552$ Para além destes dados, e com base na análise da representação gráfica obtida, os alunos poderão ainda acrescentar um comentário de um ponto de vista mais qualitativo, referindo que a quantidade de sardinhas continuará a aumentar ao longo dos anos seguintes.	
Tendo conhecimento da derivada da exponencial, alguns alunos poderão proceder a um estudo da função de forma analítica. Obtendo a expressão da derivada $S'(t) = 1{,}389 \cdot \ln(1{,}730) \cdot (1{,}730)^t$ $\approx 0{,}761172 \cdot (1{,}730)^t$ podem concluir que $S'(t) > 0$ uma vez que $(1{,}730)^t > 0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}_0^+$. Desta forma, a partir do conhecimento prévio de estudo de funções e da sua monotonia, os alunos poderão concluir que a função é monótona crescente, pelo que, segundo este modelo, a quantidade de sardinha pescada irá aumentar nos anos seguintes (seja a curto ou a longo prazo).	Optando por esta estratégia, os alunos poderão ter dificuldade no cálculo da derivada da função dada. Nesse caso, a professora poderá sugerir que estes revejam esse tópico no manual.

PERGUNTA 2.3.1.

ATIVIDADE DO ALUNO	ATIVIDADE DA PROFESSORA
Representando os pontos relacionados com os novos dados, os alunos poderão concluir, a partir da representação gráfica, que o modelo construído já não é o modelo que melhor se ajusta a todo o conjunto de dados. De facto, o modelo exponencial prevê que as quantidades de sardinha pescadas nesses anos fossem maiores. De facto, $S(6) = 37{,}210 > 25$ $S(7) = 64{,}366 > 28$ Com base nestes dados, os alunos poderão concluir que este modelo já não é adequado ao conjunto de dados total.	Os alunos poderão ter dificuldades em justificar a resposta. Nesse caso, a professora deverá sugerir que estes evidenciem as diferenças entre as previsões feitas pelo modelo exponencial e os dados reais. Pode, ainda, colocar questões como: • Na alínea anterior, porque é que considerámos que o modelo exponencial era adequado? • O que é que os novos dados nos mostram?

[Ver Anexo B]	

PERGUNTA 2.3.2.

ATIVIDADE DO ALUNO	ATIVIDADE DA PROFESSORA
Considerando o modelo logístico para a quantidade de sardinhas pescada dado por $$S(t) = \frac{c}{1 + de^{-kt}}, \qquad k, c, d \in \mathbb{R}^+$$ A partir da calculadora gráfica, os alunos poderão determinar os valores dos parâmetros c, d e k, obtendo $c = 32{,}603$ $d = 30{,}624$ $k = 0{,}759$ Em seguida, podem apresentar o modelo pedido, dado por $$S(t) = \frac{32{,}603}{1 + 30{,}624 \cdot e^{-0{,}759t}}$$ [Ver Anexo C]	Os alunos deverão ter dificuldades na utilização da calculadora para responder devidamente ao que enunciado pede. Para além de aconselhar os alunos a tirarem informação do vídeo que passa no quadro, a professora poderá ir esclarecendo as dúvidas que surgem nos grupos.

PERGUNTA 2.3.2.

ATIVIDADE DO ALUNO	ATIVIDADE DA PROFESSORA
Os alunos poderão analisar o modelo obtido e tirar algumas conclusões sobre o futuro da atividade da empresa. Prevê-se que esta análise tenham um foco mais a curto prazo. Assim os alunos poderão começar por determinar os valores da quantidade de sardinhas pescada nos anos seguintes, determinando, por exemplo: $S(8) = 30{,}452$	Alguns alunos poderão ter dificuldades em relacionar esta pergunta com a já feita relativamente ao modelo exponencial e, assim, compreender aquilo que é pedido no enunciado. Nesse caso, a professora deverá sugerir-lhes que releiam o enunciado e analisem a resposta dada na alínea anterior. Pode, ainda, colocar questões como: • Que informações é que este novo modelo construído nos dá?

$S(9) = 31{,}559$ $S(10) = 32{,}106$ $S(11) = 32{,}368$ $S(12) = 32{,}493$ Para além destes dados, e com base na análise da representação gráfica obtida, os alunos poderão ainda acrescentar um comentário de um ponto de vista mais qualitativo, referindo que a quantidade de sardinhas continuará a aumentar ao longo dos anos seguintes.	
Tendo conhecimento da derivada da exponencial, alguns alunos poderão proceder a um estudo da função de forma analítica. Obtendo a expressão da derivada $S'(t) = -32{,}603 \times \frac{(1 + 30{,}624 \cdot e^{-0{,}759t})'}{(1 + 30{,}624 \cdot e^{-0{,}759t})^2}$ $= -32{,}603 \times \frac{30{,}624 \cdot (-0{,}759) \cdot e^{-0{,}759t}}{(1 + 30{,}624 \cdot e^{-0{,}759t})^2}$ $= \frac{757{,}8116124 \cdot e^{-0{,}759t}}{(1 + 30{,}624 \cdot e^{-0{,}759t})^2}$ podem concluir que $S'(t) > 0$ uma vez que $e^{-0{,}759t} > 0$ e $(1 + 30{,}624 \cdot e^{-0{,}759t})^2 > 0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}_0^+$. Desta forma, a partir do conhecimento prévio de estudo de funções e da sua monotonia, os alunos poderão concluir que a função é monótona crescente, pelo que, segundo este modelo, a quantidade de sardinha pescada irá aumentar nos anos seguintes (seja a curto ou a longo prazo).	Optando por esta estratégia, os alunos poderão ter dificuldade no cálculo da derivada da função dada. Nesse caso, a professora poderá sugerir que estes revejam esse tópico no manual.

PERGUNTA 2.3.4.

ATIVIDADE DO ALUNO	ATIVIDADE DA PROFESSORA
Pretende-se que os alunos analisem a função obtida a partir do modelo logístico e que tirem conclusões no âmbito do contexto do problema. Analisando a representação gráfica associada a este modelo, é possível concluir	Os alunos poderão ter dificuldades em compreender o que é pedido no enunciado. Nesse caso, a professora poderá explicitar que aquilo que é pedido é uma previsão a longo prazo, recorrendo a questões como: • Como é que eu posso conhecer a evolução da quantidade de sardinha a longo prazo?

que a quantidade de sardinha pescada, ainda que aumente ao longo do tempo, tende para um valor real.	
De forma analítica, os alunos poderão determinar o limite da função quando o tempo tende para infinito. Nesse caso, $\lim_{t\to+\infty} S(t)$ $= \lim_{t\to+\infty} \frac{32{,}603}{1+30{,}624\cdot e^{-0{,}759t}}$ $= \frac{32{,}603}{1+30{,}624\cdot e^{-0{,}759\times(+\infty)}}$ $= \frac{32{,}603}{1+30{,}624\cdot e^{-\infty}}$ $= \frac{32{,}603}{1+30{,}624\cdot 0}$ $= \frac{32{,}603}{1+0}$ $= \frac{32{,}603}{1}$ $= 32{,}603$ No contexto do problema, os alunos deverão ser capazes de compreender que a pesca irá aumentar ao longo dos anos, tendendo para 32,603 toneladas de sardinha.	Optando por esta estratégia, os alunos poderão ter dificuldades em determinar o limite da exponencial. Nesse caso, a professora poderá sugerir-lhes que consultem o manual para rever esse tópico, que já foi abordado em aula anteriormente.
Relativamente à justificação, os alunos poderão concluir que, tratando-se da pesca da sardinha, não seria possível que a quantidade pescada pela empresa continuasse a crescer ao longo do tempo uma vez que os recursos não são infinitos. Assim, faz sentido que, ainda que aumente, a quantidade de sardinha pescada tenha um limite, estando de acordo com o facto de a sardinha ser um recurso finito.	Os alunos poderão ter dificuldades em compreender, no contexto do problema, a razão pela qual a quantidade de sardinha cresce ao longo dos anos a tender para um determinado valor. Nesse caso, a professora poderá colocar questões como: • Qual é a grande diferença entre o modelo exponencial e o modelo logístico considerando a atividade a longo prazo? • Qual é que será mais adequado à realidade? Porquê?

5. CONCLUSÃO

Para concluir a aula, a professora deverá recolher as produções escritas, relembrando que na aula seguinte haverá um momento de trabalho destinado à melhoria das produções escritas entregues. Depois disso, também haverá oportunidade de discussão do trabalho desenvolvido nos diferentes grupos.

Para além disso, a professora relembrará que, em casa, os alunos devem melhorar a produção escrita do trabalho de casa anterior, agora já comentada pela professora. Assim, explicará que na aula seguinte os alunos deverão entregar uma nova folha com a produção escrita melhorada.

Por fim, e tendo em conta que, devido à atividade da *República das Letras*, os horários das aulas serão alterados, a professora relembrará que aula seguinte terá início às 12h10, prolongando-se 10 minutos para lá da hora habitual, terminando, assim, às 13h10.

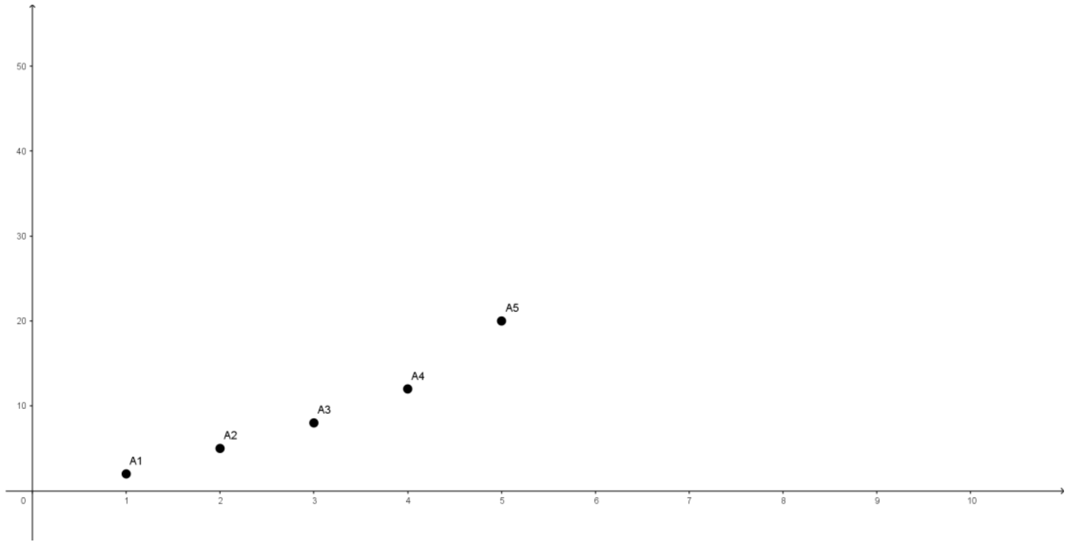
AVALIAÇÃO

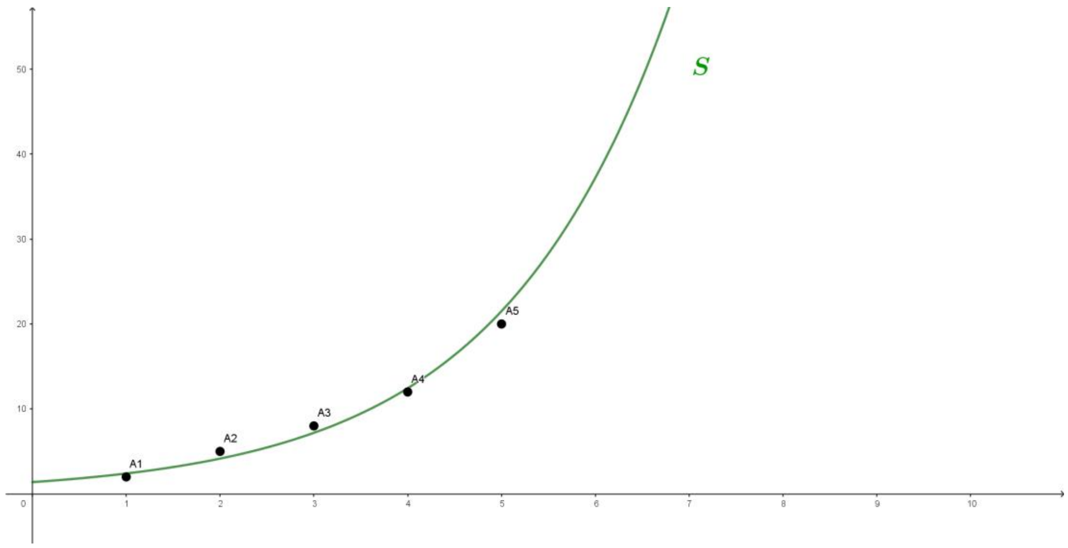
A avaliação, de caráter essencialmente regulador, será feita através da

- Observação direta do desempenho e da capacidade de comunicação dos alunos, durante o momento de trabalho autónomo;
- Apreciação das resoluções escritas dos alunos, que serão recolhidas.

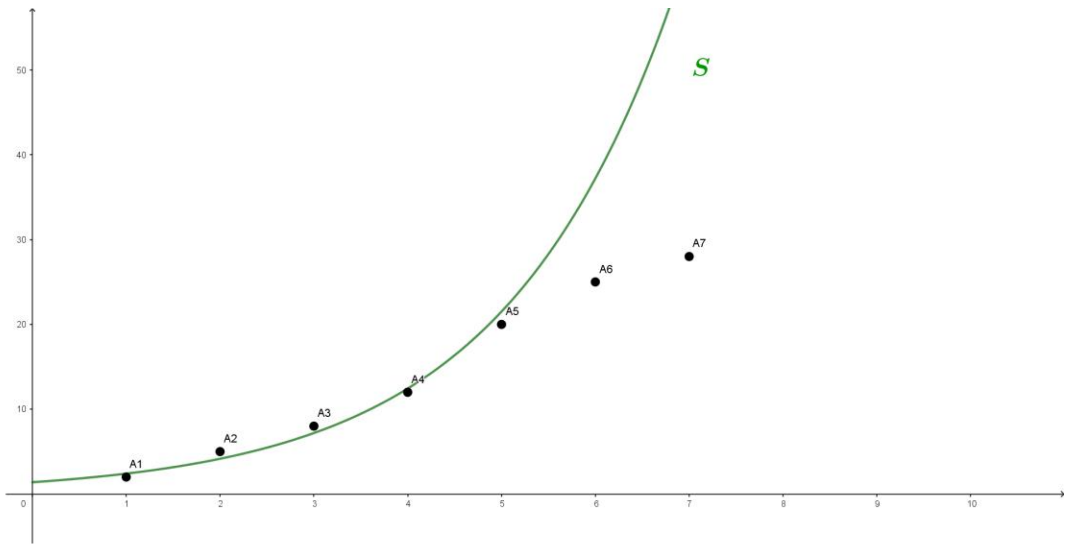
ANEXOS

ANEXO A

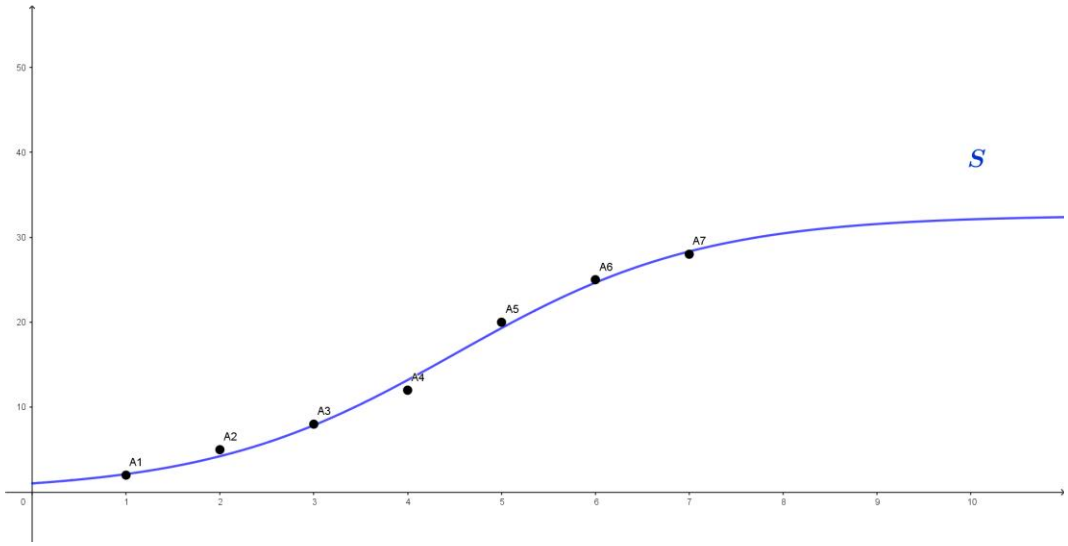




ANEXO B



ANEXO C



Anexo 8: Plano da Aula 4

ANO DE ESCOLARIDADE | 12º Ano **TURMA |** 12º A_2

DATA | 28 de Fevereiro de 2018 [12h10] **DURAÇÃO |** 60 minutos

SUMÁRIO

- Continuação da Resolução da Tarefa
- Discussão da Tarefa

TÓPICOS

DOMÍNIO 5 | Unidade 14: Modelos Exponenciais

ENQUADRAMENTO CURRICULAR [METAS]

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Modelos exponenciais

5. *Estudar modelos de crescimento e decrescimento exponencial*

   1. Saber que a evolução de determinadas grandezas, como a massa de uma substância radioativa, a temperatura de alguns sistemas ou o número de indivíduos de certas populações, pode ser modelada por uma «equação diferencial de 1.ª ordem» da forma $f' = kf$, que traduz o facto de, em cada instante, a taxa de variação ser aproximadamente proporcional à quantidade de grandeza presente.
   2. Justificar, dado um número real k, que as funções $f(x) = ce^{kx}$, onde c é uma constante real, são soluções em $\mathbb{R}$ da equação diferencial $f' = kf$ e que todas as soluções desta equação são dessa forma, mostrando que dada uma qualquer solução f, tem derivada nula a função $e^{-kx}f(x)$.

6. *Resolver problemas*

   1. +Resolver problemas envolvendo juros compostos.
   2. +Resolver problemas envolvendo as propriedades algébricas das funções exponenciais e logarítmicas.
   3. +Resolver problemas envolvendo o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais e logarítmicas, a determinação dos respetivos intervalos de monotonia bem como os extremos relativos e absolutos e a existência de assíntotas ao respetivo gráfico.
   4. +Resolver problemas envolvendo a modelação de sistemas por equações da forma $y' = ky, k \in \mathbb{R}$.

OBJETIVOS DA AULA

No final da aula, o aluno deverá ser capaz de:

- Compreender a relação de proporcionalidade entre uma função exponencial e a sua derivada;
- Conhecer a equação diferencial $y' = ky, k \in \mathbb{R}$ e as funções exponenciais como soluções;
- Resolver problemas que envolvem o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais;

- Resolver problemas recorrendo à calculadora gráfica (incluindo a potencialidade de regressão).

MODO DE TRABALHO DOS ALUNOS

- Trabalho autónomo em grupos (em pares e trio)
- Discussão em grupo turma

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

- Definição da Função Exponencial
- Propriedades da Função Exponencial
- Derivada da Função Exponencial

RECURSOS

- Quadro
- Computador
- Projetor
- Calculadora Gráfica
- Enunciado da Tarefa

MOMENTOS DA AULA

MOMENTO	**TEMPO** [Minutos]
1. Entrada dos alunos	5
2. Recolha dos TPC + Distribuição das Produções Escritas	5
3. Trabalho Autónomo	20
4. Discussão em Turma	25
5. Conclusão da Aula	5

DESENVOLVIMENTO DA AULA

1. ENTRADA DOS ALUNOS

A sala já estará organizada para o momento de trabalho a pares, de forma a facilitar a entrada dos alunos e o início do momento de trabalho autónomo. A professora recordará os alunos do trabalho que será desenvolvido durante esta aula, tendo em vista a melhoria das suas produções escritas.
Para que os alunos tomem conhecimento daquilo que irá acontecer ao longo da aula, o sumário já estará escrito no quadro, de forma a que os alunos o possam passar para os cadernos para, depois, dar início à aula planeada.

2. RECOLHA DOS TPC E DISTRIBUIÇÃO DAS PRODUÇÕES ESCRITAS DA TAREFA 2

A professora aproveitará a distribuição das produções escritas comentadas para recolher as produções escritas melhoradas dos exercícios que foram enviados para casa, evitando um momento de dispersão dentro da sala de aula.

3. TRABALHO AUTÓNOMO

No início do momento de trabalho autónomo, a professora explicará como os alunos deverão proceder à continuação da produção escrita. No final do momento de trabalho autónomo, os alunos deverão entregar uma versão melhorada da sua produção escrita, numa nova folha.
Durante este momento, os alunos poderão ainda apresentar algumas das dificuldades previstas e registas no plano da aula anterior. Para além disso, prevê-se que os alunos possam ter algumas dificuldades em compreender e utilizar o feedback. Nesse caso, a professora complementará os comentários escritos com feedback oral.
No caso de os alunos terminarem de melhorar a tarefa antes do tempo estipulado, ser-lhes-á indicado um conjunto de exercícios de consolidação das aprendizagens realizadas ao longo de todo o domínio das funções exponenciais e logarítmicas, uma vez que terão um momento de avaliação por domínios na semana seguinte ao final da intervenção letiva.

4. DISCUSSÃO EM TURMA

A discussão irá ocorrer em turma e sob a orientação da professora, que deve promover a participação dos diferentes grupos e dos seus elementos.

Na pergunta **1**, e de acordo com a observação que fez do trabalho desenvolvido em aula e da apreciação das produções escritas realizadas na aula anterior, a professora deverá selecionar um grupo para explicar a resposta pretendida. No seguimento das respostas obtidas, e tendo em conta os objetivos de aprendizagem definidos e o trabalho que será desenvolvido nas aulas seguintes, a professora deverá apresentar a equação diferencial

$$y' = ky, k \in \mathbb{R}$$

que os alunos deverão ser capazes de associar à igualdade estabelecida entre a função exponencial e a sua derivada

$$P'(x) = k \cdot P(x), \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$(ae^{bt})' = k \cdot (ae^{bt}), \qquad k \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow ab \cdot e^{bt} = k \cdot (ae^{bt}), \qquad k \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow k = b$$

De forma a evidenciar que a função exponencial surge como solução de uma equação diferencial de primeiro grau, a professora poderá questionar os alunos sobre as suas soluções, partindo do trabalho que realizaram durante a resolução desta pergunta da tarefa.

A discussão e sistematização dos aspetos mencionados acima permitirão atinjam os dois primeiros objetivos de aprendizagem definidos para a aula.

Na pergunta **2.1**., e de acordo com a observação que fez do trabalho desenvolvido em aula e da apreciação das produções escritas realizadas na aula anterior, a professora poderá selecionar um grupo que apresente o modelo pedido. De forma a garantir que os alunos compreenderam o recurso que fizeram à calculadora gráfica, a professora poderá pedir aos alunos que expliquem por palavras próprias aquilo que entendem que é a regressão exponencial.

Em seguida, e para a pergunta **2.2**., a professora deverá questionar um grupo diferentes sobre as conclusões a que chegaram e de que forma as fundamentam. Se outros grupos de trabalham tiverem escolhido formas diferentes de fundamentar as suas conclusões, a professora poderá pedir-lhes que as apresentem, valorizando o trabalho que realizaram e evidenciando aos restantes alunos da turma que era possível fazê-lo de outras formas.

Na pergunta **2.3.1.**, a professora deverá selecionar um grupo diferentes daqueles que já participaram na discussão. Os alunos deverão concluir que o modelo exponencial já não é o mais adequado e a professora poderá questioná-los se poderia existir um modelo exponencial, ainda que diferente do já construído, que se ajustasse bem ao novo conjunto de dados. Com esta hipótese, a professora poderá promover que os alunos distingam, de uma perspetiva qualitativa, as diferenças nos tipos de crescimentos descritos por um modelo exponencial e por um modelo logístico.

Na pergunta **2.3.2.**, a professora poderá selecionar um grupo que apresente o modelo pedido. De forma a garantir que os alunos compreenderam o recurso que fizeram à calculadora gráfica, a professora poderá pedir aos alunos que expliquem por palavras próprias aquilo que entendem que é a regressão logística.

Na pergunta **2.3.3.**, a professora deverá questionar um dos grupos sobre as conclusões a que chegaram e de que forma as fundamentam. Se outros grupos de trabalham tiverem escolhido formas diferentes de fundamentar as suas conclusões, a professora poderá pedir-lhes que as apresentem, valorizando o trabalho que realizaram e evidenciando aos restantes alunos da turma que era possível fazê-lo de outras formas.

Por fim, na pergunta **2.3.4.**, a professora deverá ouvir diferentes grupos, promovendo que estes se complementem entre si no tipo de conclusões obtidas. É fundamental que, na discussão desta pergunta, a professora reforce a importância do significado das conclusões no contexto do problema.

5. CONCLUSÃO

Para concluir a aula, a professora deverá recolher as versões melhoradas das produções escritas realizadas pelos alunos.

Para além disso, a professora informará os alunos dos exercícios que devem ser resolvidos em casa numa folha separada, à semelhança do que já aconteceu, esclarecendo quaisquer dúvidas que tenham ficado.

TPC

PÁGINA	EXERCÍCIO
66	6
67	7
68	9
71	15

Por fim, e tendo em conta que, devido à atividade da *República das Letras*, os horários das aulas serão alterados, a professora informará que no dia seguinte terão duas aulas de Matemática, ao contrário do que é costume. Para além da aula habitual, os alunos terão aula às 08h15, com o início da resolução de uma nova tarefa.

AVALIAÇÃO

A avaliação, de caráter essencialmente regulador, será feita através da

- Observação direta do desempenho e da capacidade de comunicação dos alunos, durante os momentos de trabalho autónomo e discussão em turma;
- Apreciação das resoluções escritas dos alunos, que serão recolhidas.

Anexo 9: Plano da Aula 5

ANO DE ESCOLARIDADE | 12º Ano **TURMA |** 12º A_2

DATA | 01 de Março de 2018 [08h15] **DURAÇÃO |** 60 minutos

SUMÁRIO

- Resolução da Tarefa 3

TÓPICOS

DOMÍNIO 5 | Unidade 14: Modelos Exponenciais

ENQUADRAMENTO CURRICULAR [METAS]

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Modelos exponenciais

5. *Estudar modelos de crescimento e decrescimento exponencial*

   1. Saber que a evolução de determinadas grandezas, como a massa de uma substância radioativa, a temperatura de alguns sistemas ou o número de indivíduos de certas populações, pode ser modelada por uma «equação diferencial de 1.ª ordem» da forma $f' = kf$, que traduz o facto de, em cada instante, a taxa de variação ser aproximadamente proporcional à quantidade de grandeza presente.
   2. Justificar, dado um número real k, que as funções $f(x) = ce^{kx}$, onde c é uma constante real, são soluções em $\mathbb{R}$ da equação diferencial $f' = kf$ e que todas as soluções desta equação são dessa forma, mostrando que dada uma qualquer solução f, tem derivada nula a função $e^{-kx}f(x)$.

6. *Resolver problemas*

   1. +Resolver problemas envolvendo juros compostos.
   2. +Resolver problemas envolvendo as propriedades algébricas das funções exponenciais e logarítmicas.
   3. +Resolver problemas envolvendo o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais e logarítmicas, a determinação dos respetivos intervalos de monotonia bem como os extremos relativos e absolutos e a existência de assíntotas ao respetivo gráfico.
   4. +Resolver problemas envolvendo a modelação de sistemas por equações da forma $y' = ky, k \in \mathbb{R}$.

OBJETIVOS DA AULA

No final da aula, o aluno deverá ser capaz de:

- Compreender a relação de proporcionalidade entre uma função exponencial e a sua derivada;
- Conhecer a equação diferencial $y' = ky, k \in \mathbb{R}$ e as funções exponenciais como soluções;
- Resolver problemas que envolvem o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais;
- Resolver problemas recorrendo à calculadora gráfica.

MODO DE TRABALHO DOS ALUNOS

- Trabalho em grupos (pares e trio)

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

- Definição da Função Exponencial
- Propriedades da Função Exponencial
- Derivada da Função Exponencial

RECURSOS

- Quadro
- Computador
- Projetor
- Calculadora Gráfica
- Enunciado da Tarefa

MOMENTOS DA AULA

MOMENTO	**TEMPO** [Minutos]
1. Entrada dos alunos + Sumário	10
2. Recolha Produções Escritas (TPC) + Esclarecimento de Dúvidas	10
3. Apresentação da Tarefa 3	5
3. Trabalho Autónomo	30
4. Conclusão da Aula	5

DESENVOLVIMENTO DA AULA

1. ENTRADA DOS ALUNOS + SUMÁRIO

A sala já estará organizada para o momento de trabalho a pares, de forma a facilitar a entrada dos alunos e o início do momento de trabalho autónomo.

Para que os alunos tomem conhecimento daquilo que irá acontecer ao longo da aula, o sumário já estará escrito no quadro, de forma a que os alunos o possam passar para os cadernos para, depois, dar início à aula planeada.

2. RECOLHA DAS PRODUÇÕES ESCRITAS DO TPC + ESCLARECIMENTO DE DÚVIDAS

A professora recolherá as produções escritas da resolução dos exercícios enviados para casa para dar feedback. Uma vez que alguns alunos sentem a necessidade de explicitar as dúvidas que tiveram e que isso pode orientar a professora no feedback ao trabalho realizado, optou-se por reservar algum tempo da aula para esse efeito.

3. APRESENTAÇÃO DA TAREFA

A professora começará por apresentar brevemente a tarefa, informando os alunos do tempo que dispõem para a sua resolução. Para além disso, a professora explicará que, no final do tempo estipulado, os alunos devem entregar uma produção escrita por grupo numa das folhas entregues, reforçando a importância de os alunos justificarem devidamente todas as respostas e conclusões que obtiverem. Estas informações visam promover que os grupos de trabalho se organizem e giram o seu tempo de trabalho de forma autónoma.

4. TRABALHO AUTÓNOMO

Para a resolução desta tarefa, a calculadora gráfica assume um papel muito importante. De facto, tal como já foi referido, as potencialidades de regressão, que os alunos não dominam, serão necessárias para a sua resolução. Para além disso, a representação gráfica das diferentes funções consideradas poderá permitir uma melhor compreensão do contexto apresentado.

PERGUNTA 1

ATIVIDADE DO ALUNO	ATIVIDADE DA PROFESSORA
	A pergunta é bastante desafiante uma vez que se trata da resolução de uma equação diferencial. Assim, revê-se que os alunos tenham dificuldades.
Pretende-se que os alunos comecem por traduzir o enunciado da lei de arrefecimento de Newton por uma equação diferencial, do tipo: $$T'(t) = k \cdot \left(T_a - T(t)\right), \qquad k \in \mathbb{R}$$ sendo T a temperatura do objeto, T_a a temperatura constante do meio ambiente e k a constante de proporcionalidade.	Os alunos poderão ter dificuldades em traduzir o enunciado da lei de Newton numa expressão matemática. Nesse caso, a professora poderá recordá-los do trabalho realizado nas aulas anteriores com a tarefa 2, podendo, ainda, colocar questões como: • Que variáveis é que Newton refere na Lei? • Que relação é que estabelece entre estas? • Como é que eu posso expressar este tipo de relação?
A partir do trabalho realizado na aula anterior, e uma vez que se trata de uma relação de proporcionalidade, os alunos poderão fazer $$f(t) = T_a - T(t)$$ Como $$f'(t) = \left(T_a - T(t)\right)' = -T'(t)$$ os alunos poderão concluir que $$f'(t) = -k \cdot f(t)$$	Este passo poderá representar aquele com maior desafio para os alunos. Uma vez que se trata de uma equação diferencial, que os alunos não sabem resolver, a professora poderá orientar os alunos a recordarem o trabalho realizado nas aulas anteriores: • Esta igualdade é semelhante a alguma coia com que tenham trabalhado ultimamente? • O que é que torna esta equação diferente? O que é que vos impede de a conseguirem resolver? Relembrando o trabalho com a relação de proporcionalidade direta entre a exponencial e a sua derivada, os alunos poderão compreender que poderão resolver a equação se a conseguirem pôr de forma a que estabeleça uma relação entre uma função e a sua derivada. Uma vez que se trata de um passo importante na resolução da pergunta, se os alunos continuarem a manifestar dificuldades, a professora poderá promover que os grupos conversem entre si sobre as conclusões já obtidas.
Perante esta igualdade, os alunos poderão deduzir que	Obtendo a igualdade, os alunos poderão ter dificuldade em deduzir que a solução da equação que apresentaram é a função

$$f(t) = ae^{-kt}, \qquad a,k \in \mathbb{R}$$ Desta forma, e partir do que foi definido inicialmente, $$ae^{-kt} = T_a - T(t)$$ $$\Leftrightarrow T(t) = T_a - ae^{-kt}$$ Sabendo que $T(0) = T_0$, $$T(0) = T_a - ae^{-k\times 0}$$ $$\Leftrightarrow T(0) = T_a - a$$ $$\Leftrightarrow T_0 = T_a - a$$ $$\Leftrightarrow a = T_a - T_0$$ Logo, $$T(t) = T_a - (T_a - T_0)\cdot e^{-kt}$$	exponencial. Nesse caso, a professora poderá sugerir-lhes que revejam o enunciado da tarefa 2 e das conclusões obtidas na discussão em aula, questionando-os: • Que tipo de função poderá ser a função f? Depois de determinarem a função f, os alunos poderão ter dificuldades em continuar a resolução do problema. Nesse caso, a professora deverá relembra-los que pretendem uma expressão que traduza a temperatura, T. Pode, ainda, colocar questões como: • O que me é dito o enunciado sobre a evolução da temperatura? • Que aspetos já conheço da evolução da temperatura? • Consigo determinar algum dos parâmetros desconhecidos?

PERGUNTA 2.1.

ATIVIDADE DO ALUNO	ATIVIDADE DA PROFESSORA
<u>Estratégia A</u> Partindo da expressão dada, e uma vez que a temperatura a que o café foi entregue ao cliente é a temperatura inicial, os alunos poderão proceder ao cálculo de $$T(0) = 20 + 60e^{-0,11\times 0}$$ $$\Leftrightarrow T(0) = 20 + 60e^{0}$$ $$\Leftrightarrow T(0) = 20 + 60$$ $$\Leftrightarrow T(0) = 80$$ A temperatura pedida é de $T_0 = 80\,^0\mathrm{C}$.	Os alunos poderão ter dificuldade em interpretar que o instante em que o cliente recebe o café é considerado o instante inicial na evolução da temperatura. Nesse caso, a professora poderá colocar questões como: • Quando é que o café é entregue ao cliente? • A expressão permite-me conhecer a temperatura nesse momento?
<u>Estratégia B</u> A partir do trabalho realizado na primeira pergunta, os alunos poderão deduzir que $$T_a = 20$$ $$T_a - T_0 = -60$$ concluindo que $$T_a = 20$$ $$T_0 = 80$$	Os alunos poderão ter dificuldade em interpretar o problema e associá-lo à expressão geral encontrada anteriormente. Nesse sentido, a professora poderá questioná-los: • O contexto apresentado representa uma situação em que a Lei de Newton pode ser aplicada? Porquê? E, em seguida, sugerir-lhes que reescrevam a expressão geral com as variáveis do contexto do problema, considerando:

Assim, poderão responder ao que é pedido, uma vez que a temperatura inicial, T_0, é a temperatura a que o café foi entregue ao cliente. A temperatura pedida é de $T_0 = 80\,^0\mathrm{C}$.	• A temperatura do café • A temperatura da pastelaria

PERGUNTA 2.2.

ATIVIDADE DO ALUNO	ATIVIDADE DA PROFESSORA
A partir da resposta inicial, os alunos poderão concluir que pretendem determinar o tempo que o cliente tem de esperar até que o café atinja os $40\,^0\mathrm{C}$. Poderão, assim, equacionar o problema da seguinte forma $T(t) = 40$ $\Leftrightarrow 20 + 60e^{-0{,}11t} = 40$ $\Leftrightarrow 60e^{-0{,}11t} = 20$ $\Leftrightarrow e^{-0{,}11t} = \frac{1}{3}$ $\Leftrightarrow -0{,}11\,t = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$ $\Leftrightarrow -0{,}11\,t = -\ln 3$ $\Leftrightarrow 0{,}11\,t = \ln 3$ $\Leftrightarrow t = \frac{\ln 3}{0{,}11}$ $\Leftrightarrow t \approx 9{,}9874$ Logo, o cliente terá de esperar, aproximadamente, 9 minutos e 59 segundos.	Os alunos poderão ter dificuldades em equacionar o problema dado. Nesse caso, a professora poderá sugerir a nova leitura do enunciado e questionar: • O que é que eu pretendo conhecer? • Sei que temperatura o cliente pretende que o café atinja? Alguns alunos poderão ter dificuldades nos processos de cálculos. Nesse caso, a professora poderá sugerir que os alunos recorram ao manual para rever as propriedades algébricas relativas à exponencial e ao logaritmo que não dominem por completo. Por fim, os alunos poderão ter dificuldades em apresentar a aproximação pedida, uma vez que se tratam de minutos e segundos. Nesse caso, a professora poderá questioná-los: • Em que unidade é apresentado o tempo? • Como é que eu posso passar minutos para segundos?

PERGUNTA 2.3.

ATIVIDADE DO ALUNO	ATIVIDADE DA PROFESSORA
Para analisar a veracidade da afirmação apresentada, os alunos terão de ir estudar a taxa de variação do café. Interpretando o significado da taxa de variação da temperatura, os alunos poderão chegar à conclusão de que esta pode ser analisada a partir da derivada da função T, T'.	Os alunos poderão ter dificuldade em associar a taxa de variação à função derivada, T'. Nesse caso, a professora poderá colocar questões como: • O que é que significa que a variação da temperatura é constante?

Assim, poderão determinar $T'(t) = (20 + 60 \cdot e^{-0,11t})'$ $\Leftrightarrow T'(t) = 60 \cdot (-0,11t)' \cdot e^{-0,11t}$ $\Leftrightarrow T'(t) = -0,11 \cdot 60 \cdot e^{-0,11t}$ $\Leftrightarrow T'(t) = -6,6 \cdot e^{-0,11t}$	• Qual é a diferença entre a variação ser constante e a temperatura ser constante? • Como é que eu posso perceber como se comporta a variação da temperatura? Alguns alunos poderão ter dificuldade em determinar a função derivada, T'. Nesse caso, a professora poderá sugerir que recorram ao manual para se recordarem desses tópicos já abordados em aula.
Estratégia A Uma vez que o objetivo é compreender se esta variação é constante os alunos, espera-se que os alunos, para estudar o comportamento de T', obtenham a sua derivada, T''. Deste modo, $T''(t) = (-6,6 \cdot e^{-0,11t})'$ $\Leftrightarrow T''(t) = -6,6 \cdot (-0,11t)' \cdot e^{-0,11t}$ $\Leftrightarrow T''(t) = (-0,11) \cdot (-6,6) \cdot e^{-0,11t}$ $\Leftrightarrow T''(t) = 0,726 \cdot e^{-0,11t}$ A partir da expressão obtida, os alunos poderão concluir que $T''(t) > 0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}_0^+$ uma vez que $e^{-0,11t} > 0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}_0^+$ Desta forma, e a partir do conhecimento do estudo analítico de funções, os alunos poderão constatar que a função derivada estará sempre a crescer, pelo que não é constante. Assim, de forma fundamentada, poderão discordar da afirmação apresentada.	Alguns alunos poderão ter dificuldade em compreender que, para estudarem analiticamente a função derivada, terão de recorrer a T''. Nesse caso, a professora poderá orientar os alunos, questionando-os: • Se eu não conhecer uma função e não tiver uma calculadora, como é que eu posso saber como a função se comporta? Alguns alunos poderão ter dificuldade em determinar a função derivada, T''. Nesse caso, a professora poderá sugerir que recorram ao manual para se recordarem desses tópicos já abordados em aula. Alguns alunos poderão ter dificuldades em fundamentar que a função T'' é sempre positiva e que, por isso, T' é sempre crescente. Nesse caso, a professora sugerir que estes recorram ao manual para recordarem esses conceitos que já foram abordados em aula ou, ainda, recorrer a um colega que esclareça a dúvida.
Estratégia B Recorrendo aos conhecimentos que possuem da definição de exponencial ou à calculadora gráfica, os alunos poderão concluir que não se trata de uma função constante. Apresentando a justificação relativa à monotonia da função ou a respetiva janela de visualização, os alunos poderão, de	Os alunos poderão ter dificuldades em argumentar recorrendo à definição da função exponencial. Nesse caso, a professora poderá sugerir-lhes que recorram ao manual para rever a definição de exponencial e que, se necessário, complementem a sua resposta com recurso à representação gráfica.

<table>
<tr><td>forma fundamentada, discordar da afirmação apresentada.</td><td></td></tr>
</table>

PERGUNTA 2.4.

<table>
<tr><th>ATIVIDADE DO ALUNO</th><th>ATIVIDADE DA PROFESSORA</th></tr>
<tr><td>

<u>Estratégia A</u>
Partindo da expressão dada, e uma vez que é pedida a temperatura do café quando este é deixado a arrefecer por tempo indeterminado, os alunos poderão interpretar que, para isso, deverão determinar o limite da função T , que traduz a evolução da temperatura, quando t tende para infinito.

</td><td>

Os alunos poderão ter dificuldades em interpretar o significado do arrefecimento por tempo indeterminado e associá-lo ao limite da temperatura quando o tempo tende ara infinito. Nesse caso, a professora poderá orientá-los, questionando-os:

Se eu deixar o café a arrefecer em cima do balcão por tempo indeterminado, o que é que isso significa relativamente ao tempo?
Conhecendo a expressão da função eu traduz a evolução da temperatura, como é que eu posso conhecer o valor dessa temperatura?

</td></tr>
<tr><td>

Nesse caso,

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to+\infty} T(t)\\&= \lim_{t\to+\infty}(20 + 60 \cdot e^{-0,11t})\\&= 20 + \lim_{t\to+\infty}(60 \cdot e^{-0,11t})\\&= 20 + 60 \cdot \lim_{t\to+\infty}(e^{-0,11t})\\&= 20 + 60 \cdot \left(e^{-0,11\times(+\infty)}\right)\\&= 20 + 60 \cdot (e^{-\infty})\\&= 20 + 60 \cdot 0\\&= 20\end{aligned}$$

</td><td>

Alguns alunos poderão ter dificuldades em determinar o valor do limite. Nesse caso a professora poderá sugerir que recorram ao manual e que revejam a monotonia da função exponencial. Pode, ainda, pedir que estes esbocem o gráfico de funções exponenciais (de base e), com exponentes positivo e negativo, observando as diferenças nos limites para infinito.

</td></tr>
<tr><td>

Por fim, os alunos poderão concluir que se o café for deixado a arrefecer por tempo indeterminado, a sua temperatura tenderá para $20\,^{0}\mathrm{C}$.

No contexto do problema, poderão concluir que a temperatura ambiente da pastelaria é de $20\,^{0}\mathrm{C}$.

</td><td>

Os alunos poderão ter dificuldade em interpretar a situação no contexto do problema e concluir que a temperatura obtida é a temperatura obtida. Nesse caso, e uma vez que se tata de uma turma que já teve Física e Química, a professora poderá questioná-los:

Se eu deixar o café a arrefecer por tempo indeterminado, a sua temperatura irá atingir um equilíbrio. Do que se trata este equilíbrio? Entra em equilíbrio com o quê?

</td></tr>
<tr><td>

<u>Estratégia B</u>

</td><td></td></tr>
</table>

A partir do trabalho realizado na primeira pergunta, os alunos poderão deduzir que $$T_a = 20$$ No contexto do problema, poderão fundamentar que um café deixado a arrefecer no balcão tenderá a ficar em equilíbrio com o meio em que está, atingindo a mesma temperatura a que está a sala. Assim, poderão concluir que a temperatura pedida é $20\ ^0\mathrm{C}$.	Os alunos poderão ter dificuldades em interpretar a situação no contexto do problema e concluir que a temperatura ambiente é a temperatura para a qual tende o café quando deixado a arrefecer por tempo indeterminado. Nesse caso, a professora poderá colocar questões como: • Que papem tem a temperatura da pastelaria no problema? Tem impacto na temperatura do café? Qual?

5. CONCLUSÃO

Para concluir a aula, a professora deverá recolher as produções escritas, relembrando que na aula seguinte haverá um momento de trabalho destinado à melhoria das produções escritas entregues. Depois disso, também haverá oportunidade de discussão do trabalho desenvolvido nos diferentes grupos.

AVALIAÇÃO

A avaliação, de caráter essencialmente regulador, será feita através da

- Observação direta do desempenho e da capacidade de comunicação dos alunos, durante o momento de trabalho autónomo;
- Apreciação das resoluções escritas dos alunos, que serão recolhidas.

Anexo 10: Plano da Aula 6

ANO DE ESCOLARIDADE | 12º Ano

TURMA | 12º A_2

DATA | 01 de Março de 2018 [12h00]

DURAÇÃO | 60 minutos

SUMÁRIO

- Continuação da Resolução da Tarefa 3
- Discussão da Tarefa

TÓPICOS

DOMÍNIO 5 | Unidade 14: Modelos Exponenciais

ENQUADRAMENTO CURRICULAR [METAS]

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Modelos exponenciais

5. *Estudar modelos de crescimento e decrescimento exponencial*

   1. Saber que a evolução de determinadas grandezas, como a massa de uma substância radioativa, a temperatura de alguns sistemas ou o número de indivíduos de certas populações, pode ser modelada por uma «equação diferencial de 1.ª ordem» da forma $f' = kf$, que traduz o facto de, em cada instante, a taxa de variação ser aproximadamente proporcional à quantidade de grandeza presente.
   2. Justificar, dado um número real k, que as funções $f(x) = ce^{kx}$, onde c é uma constante real, são soluções em $\mathbb{R}$ da equação diferencial $f' = kf$ e que todas as soluções desta equação são dessa forma, mostrando que dada uma qualquer solução f, tem derivada nula a função $e^{-kx}f(x)$.

6. *Resolver problemas*

   1. +Resolver problemas envolvendo juros compostos.
   2. +Resolver problemas envolvendo as propriedades algébricas das funções exponenciais e logarítmicas.
   3. +Resolver problemas envolvendo o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais e logarítmicas, a determinação dos respetivos intervalos de monotonia bem como os extremos relativos e absolutos e a existência de assíntotas ao respetivo gráfico.
   4. +Resolver problemas envolvendo a modelação de sistemas por equações da forma $y' = ky, k \in \mathbb{R}$.

OBJETIVOS DA AULA

No final da aula, o aluno deverá ser capaz de:

- Compreender a relação de proporcionalidade entre uma função exponencial e a sua derivada;
- Conhecer a equação diferencial $y' = ky, k \in \mathbb{R}$ e as funções exponenciais como soluções;
- Resolver problemas que envolvem o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais;
- Resolver problemas recorrendo à calculadora gráfica.

MODO DE TRABALHO DOS ALUNOS

- Trabalho autónomo em grupos (em pares e trio)
- Discussão em grupo turma

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

- Definição da Função Exponencial
- Propriedades da Função Exponencial
- Derivada da Função Exponencial

RECURSOS

- Quadro
- Computador
- Projetor
- Calculadora Gráfica
- Enunciado da Tarefa

MOMENTOS DA AULA

MOMENTO	**TEMPO** [Minutos]
1. Entrada dos alunos	10
2. Distribuição das Produções Escritas	5
3. Trabalho Autónomo	20
4. Discussão em Turma	25
5. Conclusão da Aula	5

DESENVOLVIMENTO DA AULA

1. ENTRADA DOS ALUNOS

A sala já estará organizada para o momento de trabalho a pares, de forma a facilitar a entrada dos alunos e o início do momento de trabalho autónomo. A professora recordará os alunos do trabalho que será desenvolvido durante esta aula, tendo em vista a melhoria das suas produções escritas.

Para que os alunos tomem conhecimento daquilo que irá acontecer ao longo da aula, o sumário já estará escrito no quadro, de forma a que os alunos o possam passar para os cadernos para, depois, dar início à aula planeada.

Uma vez que antes da aula de Matemática, os alunos têm aula de Educação Física, optou-se por deixar mais tempo reservado para a entrada dos alunos, prevendo algum atraso na sua chegada à sala de aula.

2. DISTRIBUIÇÃO DAS PRODUÇÕES ESCRITAS DA TAREFA 3

A professora distribuirá as produções escritas comentadas, aproveitando para esclarecer alguma dúvida sobre a tarefa que tenha surgido desde a aula anterior.

3. TRABALHO AUTÓNOMO

No início do momento de trabalho autónomo, a professora explicará como os alunos deverão proceder à continuação da produção escrita. No final do momento de trabalho autónomo, os alunos deverão entregar uma versão melhorada da sua produção escrita, numa nova folha.

Durante este momento, os alunos poderão ainda apresentar algumas das dificuldades previstas e registas no plano da aula anterior. Para além disso, prevê-se que os alunos possam ter algumas dificuldades em compreender e utilizar o feedback. Nesse caso, a professora complementará os comentários escritos com feedback oral.

No caso de os alunos terminarem de melhorar a tarefa antes do tempo estipulado, ser-lhes-á indicado um conjunto de exercícios de consolidação das aprendizagens realizadas ao longo de todo o domínio das funções exponenciais e logarítmicas, uma vez que terão um momento de avaliação por domínios na semana seguinte ao final da intervenção letiva.

4. DISCUSSÃO EM TURMA

A discussão irá ocorrer em turma e sob a orientação da professora, que deve promover a participação dos diferentes grupos e dos seus elementos.

Na pergunta **1**, e de acordo com a observação que fez do trabalho desenvolvido em aula e da apreciação das produções escritas realizadas na aula anterior, a professora deverá selecionar um grupo para explicar a estratégia escolhida. Caso se verifiquem grupos que não tenham completado a sua resolução, a professora poderá começar por esses grupos, pedindo aos colegas que complementem a sua resolução.

Assim, e promovendo a participação dos vários grupos e a valorização do seu trabalho, a professora poderá dividir a resolução desta pergunta em diferentes passos, questionando diferentes grupos.

EQUACIONAR O ENUNCIADO

A partir do enunciado, a professora poderá pedir a um grupo que explique a forma como traduziu o enunciado para uma expressão matemática:

$$T'(t) = k \cdot \left(T_a - T(t)\right), \qquad k \in \mathbb{R}$$

DEFINIÇÃO DA NOVA FUNÇÃO

A professora poderá pedir a um dos grupos que explique como surgiu a ideia de definir a função f, formulando, em seguida, a nova equação:

$$f(t) = T_a - T(t)$$

Como

$$f'(t) = \left(T_a - T(t)\right)' = -T'(t)$$

Então, temos que

$$f'(t) = -k \cdot f(t)$$

Sendo um dos passos mais desafiantes da resolução da tarefa, importa que a professora garanta que todos os alunos ficam com as suas dúvidas esclarecidas.

EXPONENCIAL COMO SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO

A partir da discussão realizada no âmbito da Tarefa 2, a professora poderá pedir um grupo distinto que fundamente que

$$f(t) = ae^{-kt}, \qquad a, k \in \mathbb{R}$$

Uma vez que inicialmente se tinha definido

$$ae^{-kt} = T_a - T(t)$$

Então podemos obter

$$T(t) = T_a - ae^{-kt}$$

<u>DETERMINAÇÃO DO PARÂMETRO a</u>

É possível que nem todos os grupos compreendam que podem determinar o valor deste parâmetro. Nesse caso, e questionando um grupo específico, a professora poderá perguntar-lhes se consideram que é possível conhecer mais alguma coisa da expressão já obtida.

Em seguida, e chamando à atenção das constantes introduzidas no enunciado, a professora poderá pedir-lhes que reescrevam a expressão obtida em função dessas constantes dadas.

Nesse caso, e como $T(0) = T_0$,

$$\begin{aligned} &T(0) = T_a - ae^{-k\times 0} \\ &\Leftrightarrow T(0) = T_a - a \\ &\Leftrightarrow T_0 = T_a - a \\ &\Leftrightarrow a = T_a - T_0 \end{aligned}$$

Logo, é possível obter

$$T(t) = T_a - (T_a - T_0) \cdot e^{-kt}$$

Na pergunta **2.1.**, de acordo com a observação de acordo com a observação que fez do trabalho desenvolvido em aula e da apreciação das produções escritas realizadas na aula anterior, a professora poderá pedir a um elemento de um grupo que responda à pergunta e, caso tenha efetuado cálculos, que os demonstre no quadro.

A professora deverá realçar as diferentes estratégias possíveis, ainda que todos os grupos tenham optado por uma única.

Na pergunta **2.2.**, de acordo com a observação de acordo com a observação que fez do trabalho desenvolvido em aula e da apreciação das produções escritas realizadas na aula anterior, a professora poderá pedir a um elemento de um grupo que equacione o problema e que o resolva no quadro.

No final, deve garantir junto dos colegas que todos obtiveram o mesmo resultado, pedindo ao aluno que esclareça as dúvidas que surjam da sua resolução.

Na pergunta **2.3.**, a professora poderá começar por sondar toda a turma sobre as opiniões relativas à afirmação. Havendo opiniões diferentes, poderá selecionar grupos com opiniões contrárias e dar espaço para que cada um argumente de acordo com o trabalho realizado. Depois disso, deverá questionar os restantes grupos sobre diferentes estratégias possíveis para a fundamentação da resposta. Ainda que algumas estratégias não sejam escolhidas por nenhum grupo, a professora poderá referi-las, de forma a que os alunos se apercebam da diversidade de caminhos possíveis.

Na pergunta **2.4.**, de acordo com a observação de acordo com a observação que fez do trabalho desenvolvido em aula e da apreciação das produções escritas realizadas na aula anterior, a professora pedirá a um dos grupos que apresenta a sua resposta e a forma como a fundamentou. Havendo grupos que tenham escolhido diferentes estratégias, a professora dará espaço para que estes as expliquem. No fim, poderá, ainda, sugerir alguma estratégia que não tenha sido escolhida por nenhum dos grupos. Sendo a pergunta com maior ligação ao contexto real, a professora deverá garantir que todos os alunos compreendem a interpretação necessária e a conclusão de que a temperatura para a qual o café irá tender é a temperatura da pastelaria.

No fim, a professora deverá explicitar que, mesmo sem realizando cálculos, a partir do trabalho realizado na primeira pergunta, os alunos poderiam conhecer, à partida, diferentes aspetos relativos à evolução da temperatura do café.

5. CONCLUSÃO

Para concluir a aula, a professora deverá recolher as versões melhoradas das produções escritas realizadas pelos alunos.

Para além disso, a professora informará que na aula do dia seguinte os alunos terão oportunidade de melhorar os exercícios dos trabalhos enviados para casa, pedindo-lhes que tragam esses documentos caso não os tenham entregue já. Como poderão acabar esse trabalho antes do empo, a professora deverá realçar a importância de trazerem o manual para a aula, a fim de realizarem trabalho de consolidação. Para além disso realizarão um questionário que finalizará a intervenção letiva.

AVALIAÇÃO

A avaliação, de caráter essencialmente regulador, será feita através da

- Observação direta do desempenho e da capacidade de comunicação dos alunos, durante os momentos de trabalho autónomo e discussão em turma;
- Apreciação das resoluções escritas dos alunos, que serão recolhidas.

Anexo 11: Plano da Aula 7

ANO DE ESCOLARIDADE | 12º Ano **TURMA |** 12º A_2

DATA | 02 de Março de 2018 [09h25] **DURAÇÃO |** 60 minutos

SUMÁRIO

- Resolução de Exercícios
- Realização do Questionário 2

TÓPICOS

DOMÍNIO 5 | Unidade 14: Modelos Exponenciais

ENQUADRAMENTO CURRICULAR [METAS]

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Modelos exponenciais

5. *Estudar modelos de crescimento e decrescimento exponencial*

   1. Saber que a evolução de determinadas grandezas, como a massa de uma substância radioativa, a temperatura de alguns sistemas ou o número de indivíduos de certas populações, pode ser modelada por uma «equação diferencial de 1.ª ordem» da forma $f' = kf$, que traduz o facto de, em cada instante, a taxa de variação ser aproximadamente proporcional à quantidade de grandeza presente.
   2. Justificar, dado um número real k, que as funções $f(x) = ce^{kx}$, onde c é uma constante real, são soluções em $\mathbb{R}$ da equação diferencial $f' = kf$ e que todas as soluções desta equação são dessa forma, mostrando que dada uma qualquer solução f, tem derivada nula a função $e^{-kx}f(x)$.

6. *Resolver problemas*

   1. +Resolver problemas envolvendo juros compostos.
   2. +Resolver problemas envolvendo as propriedades algébricas das funções exponenciais e logarítmicas.
   3. +Resolver problemas envolvendo o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais e logarítmicas, a determinação dos respetivos intervalos de monotonia bem como os extremos relativos e absolutos e a existência de assíntotas ao respetivo gráfico.
   4. +Resolver problemas envolvendo a modelação de sistemas por equações da forma $y' = ky, k \in \mathbb{R}$.

OBJETIVOS DA AULA

No final da aula, o aluno deverá ser capaz de:

- Resolver problemas que envolvem o estudo de funções definidas a partir de funções exponenciais;
- Refletir sobre o processo de trabalho realizado, seja individual seja em grupo.

MODO DE TRABALHO DOS ALUNOS

- Trabalho autónomo individual

CONHECIMENTOS PRÉVIOS

- Definição da Função Exponencial
- Propriedades da Função Exponencial
- Derivada da Função Exponencial

RECURSOS

- Quadro
- Computador
- Projetor
- Calculadora Gráfica
- Manual
- Questionário 2

MOMENTOS DA AULA

MOMENTO	**TEMPO** [Minutos]
1. Entrada dos alunos	10
2. Distribuição das Produções Escritas do TPC	5
3. Trabalho Autónomo	25
4. Realização do Questionário 2	20
5. Conclusão da Aula	5

DESENVOLVIMENTO DA AULA

1. ENTRADA DOS ALUNOS

A sala já estará organizada para o momento de trabalho individual, de forma a facilitar a entrada dos alunos e o início do momento de trabalho autónomo. A professora recordará os alunos do trabalho que será desenvolvido durante esta aula, tendo em vista a melhoria das suas produções escritas.

Para que os alunos tomem conhecimento daquilo que irá acontecer ao longo da aula, o sumário já estará escrito no quadro, de forma a que os alunos o possam passar para os cadernos para, depois, dar início à aula planeada.

2. DISTRIBUIÇÃO DAS PRODUÇÕES ESCRITAS DO TPC

A professora distribuirá as produções escritas comentadas, aproveitando para esclarecer alguma dúvida sobre a tarefa que tenha surgido desde a aula anterior.

3. TRABALHO AUTÓNOMO

No início do momento de trabalho autónomo, a professora explicará como os alunos deverão proceder à continuação da produção escrita. No final do momento de trabalho autónomo, os alunos deverão entregar uma versão melhorada da sua produção escrita, numa nova folha.

Durante este momento, os alunos poderão apresentar dificuldades em compreender e utilizar o feedback. Nesse caso, a professora complementará os comentários escritos com feedback oral.

No caso de os alunos terminarem de melhorar a tarefa antes do tempo estipulado, ser-lhes-á entregue o questionário 2 e, posteriormente, indicado um conjunto de exercícios de consolidação das aprendizagens realizadas ao longo de todo o domínio das funções exponenciais e logarítmicas. Este aspeto deve-se ao facto de os alunos irem ter um momento de avaliação por domínios na semana seguinte ao final da intervenção letiva.

4. REALIZAÇÃO DO QUESTIONÁRIO 2

No final do tempo estipulado para a melhoria das produções escritas, a professora distribuirá o questionário 2, aproveitando para recolher as novas versões do trabalho dos alunos. Depois de sugerir aos alunos que leiam todas as perguntas, esclarecerá as dúvidas que surgirem.

No caso de os alunos terminarem de responder ao questionário 2 antes do tempo estipulado, ser-lhes-á sugerido um conjunto de exercícios de consolidação das aprendizagens realizadas. Estes exercícios são selecionados do manual.

5. CONCLUSÃO

Para concluir a aula, a professora deverá recolher as versões melhoradas das produções escritas realizadas pelos alunos.

Para além disso, a professora aproveitará a última aula da intervenção letiva para rever o trabalho realizado ao longo das aulas. De forma particular, a professora realçará a importância de reconhecer a aplicabilidade da Matemática nos contextos reais trabalhos em sala de aula.

Por fim, a professora agradecerá a disponibilidade e compreensão dos alunos, nomeadamente em relação às mudanças de horários feitas ao longo da intervenção para cumprir a planificação feita.

AVALIAÇÃO

A avaliação, de caráter essencialmente regulador, será feita através da:

- Observação direta do desempenho dos alunos, durante o momento de trabalho autónomo;
- Apreciação das resoluções escritas dos alunos, que serão recolhidas.

Anexo 12: Questionário 1

COLÉGIO PEDRO ARRUPE	MATEMÁTICA A | 12º ANO
	QUESTIONÁRIO 1

FEEDBACK ESCRITO

Durante as próximas aulas, vais receber feedback escrito relativamente a várias tarefas em que vais trabalhar, a nível individual e em grupo. Este questionário pretende perceber melhor qual é a tua experiência, enquanto aluno, com este tipo de prática de ensino. Por isso, peço-te que respondas de forma sincera às perguntas que se seguem.

1. Durante o teu percurso escolar, já alguma vez tiveste a experiência de um professor te dar feedback, na forma de comentários escritos, a trabalhos que tenhas realizado? Se sim, explica sucintamente em que disciplinas e em que trabalhos isso aconteceu.

2. Qual a tua opinião sobre essa prática do professor? Ajuda-te a aprender? Não ajuda nada? Porquê?

3. Descreve qual o procedimento utilizado (Com que periodicidade recebias feedback? O que fazias depois de teres recebido o feedback? Melhoravas o trabalho que tinha recebido feedback ou o próximo a realizar? Entregavas de novo ao professor ou não?).

Anexo 13: Questionário 2

COLÉGIO PEDRO ARRUPE

MATEMÁTICA A | 12º ANO
QUESTIONÁRIO 2

FEEDBACK ESCRITO

Nas últimas aulas, recebeste feedback relativamente a várias tarefas em que trabalhaste, a nível individual e em grupo. Este questionário pretende perceber melhor como foi a tua experiência com este tipo de prática no trabalho que desenvolveste. Por isso, peço-te que respondas de forma sincera às perguntas que se seguem.

1. De forma geral, consideras que o feedback que te foi dado foi útil para o trabalho que desenvolveste? Ajudou-te a aprender? Não ajudou nada? Porquê?

2. O que é que mais te ajudou nos comentários que recebeste?

(Por exemplo: Foi a forma como estavam escritos? Foi o conteúdo dos comentários? Foi a periodicidade com que os recebeste? Foi o facto de serem dados de forma a poderes melhorar o trabalho e voltares a entregar ao professor?)